

N° D'ORDRE :

846.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. JULES DELEMER.

1^{re} THÈSE. — SUR LE MOUVEMENT VARIÉ DE L'EAU DANS LES TUBES CAPILLAIRES
CYLINDRIQUES, ÉVASÉS À LEUR ENTRÉE, ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DU
RÉGIME UNIFORME DANS CES TUBES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS D'ANALYSE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 mai 1895, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

BOUSSINESQ, } *Examineurs.*
PAINLEVÉ, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

N° D'ORDRE :

846.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. JULES DELEMER.

1^{re} THÈSE. — SUR LE MOUVEMENT VARIÉ DE L'EAU DANS LES TUBES CAPILLAIRES
CYLINDRIQUES, ÉVASÉS A LEUR ENTRÉE, ET SUR L'ÉTABLISSEMENT DU
RÉGIME UNIFORME DANS CES TUBES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS D'ANALYSE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 29 mai 1895, devant la Commission d'examen.

MM. DARBOUX, *Président.*

BOUSSINESQ, } *Examineurs.*
PAINLEVÉ, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

ACADÉMIE DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

	MM.	
DOYEN	DARBOUX, professeur....	Géométrie supérieure.
PROFESSEUR HONORAIRE....	PASTEUR.	
	DE LACAZE-DUTHIERS..	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	HERMITE.....	Algèbre supérieure.
	TROOST.....	Chimie.
	FRIEDEL.....	Chimie organique.
	TISSERAND.....	Astronomie.
	LIPPMANN.....	Physique.
	HAUTEFEUILLE.....	Minéralogie.
	BOUTY.....	Physique.
	APPELL.....	Mécanique rationnelle.
	DUCLAUX.....	Chimie biologique.
	BOUSSINESQ.....	Mécanique physique et expé- rimentale.
PROFESSEURS.....	PICARD.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	POINCARÉ.....	Calcul des probabilités, Phy- sique mathématique.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
	BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	DITTE.....	Chimie.
	MUNIER-CHALMAS.....	Géologie.
	GIARD.....	Zoologie. Évolution des êtres organisés.
	WOLF.....	Astronomie.
	CHATIN.....	Zoologie, Anatomie, Physio- logie comparée.
PROFESSEURS ADJOINTS.....	JOLY.....	Chimie.
	PELLAT.....	Physique.
SECRÉTAIRE.....	FOUSSEREAU.	

A .

MONSIEUR J. BOUSSINESQ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

Hommage de profonde reconnaissance.

JULES DELEMER.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553815_0103

A MON PÈRE ET A MA MÈRE.

Hommage de la plus vive affection filiale.

JULES DELEMER.

PREMIÈRE THÈSE.

SUR

LE MOUVEMENT PERMANENT VARIÉ DE L'EAU

DANS

LES TUBES CAPILLAIRES CYLINDRIQUES, ÉVASÉS A LEUR ENTRÉE,

ET SUR

L'ÉTABLISSEMENT DU RÉGIME UNIFORME DANS CES TUBES.

INTRODUCTION.

I. Les méthodes du Calcul intégral ont permis de faire l'étude complète des écoulements permanents des liquides dans les tubes fins, lorsque le régime est uniforme ⁽¹⁾. M. Boussinesq a expliqué les lois générales de l'écoulement dans tous les tubes cylindriques ⁽²⁾ et étudié en détail quelques tubes ayant leurs sections des formes les plus simples ⁽³⁾. Dans toutes ces questions, la théorie est rigoureusement d'accord avec l'expérience.

M. Boussinesq a également abordé avec succès l'étude des écoule-

⁽¹⁾ Voir le Mémoire présenté par M. Boussinesq à l'Académie des Sciences, 27 juillet 1868, inséré au *Journal de Liouville*, année 1868, p. 377.

⁽²⁾ Voir page 6 : Comparaison, etc.

⁽³⁾ Voir n° III, p. 7 et suivantes.

ments en régime varié⁽¹⁾. Mon but principal, dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à la Faculté, est d'appliquer les principes de sa théorie aux phénomènes de régime graduellement varié qui se produisent plus spécialement à l'entrée des tubes. Je comparerai ensuite les résultats que j'aurai obtenus à ceux qu'a donnés l'expérience.

Rappelons, en commençant, la mise en équation des problèmes relatifs au frottement des liquides coulant dans les tubes, et résumons ce qu'on sait sur le régime uniforme. Cela rendra plus claire l'exposition des questions qui suivront.

Équations indéfinies régissant les écoulements de liquides dans les tubes fins. — Admettons l'hypothèse que nous puissions obtenir un tube très long, avec cela bien calibré, c'est-à-dire tel, que la surface de section ne varie que très peu entre deux points à distance finie de ce tube; et supposons même que l'écoulement s'y fasse sans tourbillonnements. Les vitesses des molécules auront toutes la même direction, celle de l'axe du tube, sauf en des endroits exceptionnels et sur d'assez petites longueurs. Dans nos problèmes, l'axe des x aura toujours la direction et aussi le sens de ces vitesses. Les axes des y et des z seront deux perpendiculaires situées dans le plan d'une section droite.

Ceci posé, appelons u, v, w les vitesses d'une molécule liquide quelconque suivant les trois axes; u', v', w' ses accélérations; et remarquons de suite que :

1° Les vitesses v et w sont, même dans le cas d'un mouvement varié, toujours très petites par rapport à u ; par le fait même, en vertu d'un principe généralement admis en Physique, toutes leurs dérivées sont du même ordre qu'elles;

2° $\frac{du}{dx}$ est petit par rapport à $\frac{du}{d(y, z)}$, car la vitesse d'un même filet liquide entre deux points à distance finie, c'est-à-dire comparable aux dimensions transversales, ne peut guère changer. Sur une longueur de filet liquide égale, par exemple, au rayon du tube, la variation de vitesse ne sera presque rien à côté de celle qui existe entre le filet du centre et ceux de la paroi.

(¹) Voir un Mémoire de M. Boussinesq, *Journal de Liouville*, 1878, p. 377.

Deux conséquences immédiates : l'expression mathématique de u' se compose de plusieurs termes contenant tous un facteur petit par rapport à u ; et v' , w' sont négligeables à côté de u' .

On peut négliger les carrés et produits de toutes ces quantités petites à côté des quantités elles-mêmes. Introduisons le coefficient de frottement ε , le seul à considérer dans un fluide peu compressible; il est lui-même une quantité très petite et que l'on démontre d'ailleurs devoir être essentiellement positive.

Ces remarques permettent d'écrire les équations de Navier, relatives aux liquides à frottement, sous la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X - u' + \frac{\varepsilon}{\rho} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right), \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y, \quad \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z; \end{array} \right.$$

p et ρ y représentent la pression et la densité au point (x, y, z) , X , Y , Z les composantes de la pesanteur rapportées à l'unité de masse.

Les deux dernières équations montrent que la pression varie hydrostatiquement dans tout plan parallèle aux (y, z) ; d'où suit la constance de $\frac{d}{dx} \frac{p}{\rho g}$ sur toute l'étendue d'une même section.

Observons que la composante X , dans la première de nos équations, égale $g \sin i$, en appelant i l'angle de l'axe des x avec un plan horizontal, et désignons par I l'expression

$$\left(\sin i - \frac{d}{dx} \frac{p}{\rho g} \right);$$

c'est la *pente motrice*. La première des équations de Navier prendra la forme

$$(2) \quad \frac{\varepsilon}{\rho g} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + I = \frac{u'}{g}.$$

Il faudra y joindre, quand on étudiera un mouvement non uniforme, l'équation de continuité

$$(3) \quad -\frac{\rho'}{\rho} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Équations aux limites. — Nous appellerons σ la section déterminée, dans le volume du courant liquide, par le plan des (y, z) , et χ le contour de cette section.

Étudions la pression qui s'exerce du dehors, c'est-à-dire de la paroi, sur tout élément de la surface limite du liquide. On peut remplacer la normale à l'élément de la paroi dont il s'agit par une droite toujours très voisine, savoir : la normale à l'élément $d\chi$ du contour au même point, située dans le plan des (y, z) . Désignons par β l'angle de cette normale tirée vers le dehors avec l'axe des y . Ceci posé, plaçons-nous dans la couche de liquide contiguë à la paroi, et les composantes suivant les trois axes de la pression qu'elle subit se réduiront alors, si l'on néglige les quantités d'ordre supérieur, à ⁽¹⁾

$$(4) \quad \begin{cases} p_x = \varepsilon \left(\frac{du}{dy} \cos \beta + \frac{du}{dz} \sin \beta \right), \\ p_y = -p \cos \beta, \quad p_z = -p \sin \beta. \end{cases}$$

Représentons par $\frac{du}{dn}$ la dérivée de u prise suivant la normale menée toujours vers l'extérieur; nous pourrions écrire

$$(5) \quad p_x = \varepsilon \frac{du}{dn}.$$

Soit F le frottement du milieu extérieur sur le fluide, frottement de sens contraire à la vitesse et, par conséquent, dirigé suivant les x négatifs. On aura donc

$$p_x = -F.$$

Comment déterminer F ? Par deux hypothèses :

1° La paroi est mouillée; on suppose alors le liquide tout à fait immobilisé contre elle, $u = 0$, supposition directement prouvée par plusieurs faits;

⁽¹⁾ Ces expressions des composantes sont tirées des formules que l'on peut trouver dans tous les Traités où l'on étudie certaines branches de la Mécanique physique :

$$p_x = N_x \cos \alpha + T_z \cos \beta + T_y \cos \gamma;$$

p_y, p_z égalent des expressions de même forme.

2° La paroi n'est pas mouillée; on admet que F est proportionnel à la pression et à la vitesse u . L'équation aux limites devient, par suite,

$$\varepsilon \frac{du}{dn} = kpu.$$

En général, kp est assez grand, car la pression est alors forte. Or $\frac{du}{dn}$ reste nécessairement fini. Donc il faut que u soit fort petit à la paroi. Ainsi ce cas se confond pratiquement avec l'autre, comme on verra.

II. Régime uniforme. — Dans le cas de régime uniforme, toutes les molécules liquides ont un mouvement rectiligne et uniforme. Les équations qui déterminent le mouvement se simplifient encore si l'on considère que $\nu = 0$, $\omega = 0$.

Il reste : équation indéfinie,

$$(6) \quad \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{\rho g I}{\varepsilon} = 0;$$

équations aux limites,

$$(7) \quad u = 0 \quad \text{à la paroi.}$$

Ces équations déterminent u en chaque point d'une section σ , pourvu toutefois que l'on se donne la valeur constante de I sur cette section.

Supposons, en effet, qu'il y ait deux solutions au problème : u et $u + u_1$;

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 \text{ satisfait à l'équation indéfinie} \\ \frac{d^2 u_1}{dy^2} + \frac{d^2 u_1}{dz^2} = 0, \\ \text{et à l'équation aux limites} \\ u_1 = 0. \end{array} \right.$$

Multiplions la première par $u_1 d\sigma$, et intégrons sur toute la section σ ; puis, appliquons-lui la formule d'intégration par parties, en nous souvenant que nous avons appelé χ le contour de σ . Nous arri-

verons simplement à la relation

$$(8 \text{ bis}) \quad \int_{\chi} u_1 \left(\frac{du_1}{dy} \cos \beta + \frac{du_1}{dz} \sin \beta \right) d\chi - \int_{\sigma} \left(\frac{du_1^2}{dy^2} + \frac{du_1^2}{dz^2} \right) d\sigma = 0,$$

où la première intégrale est nulle à cause de l'équation aux limites. Donc, on a, sur toute la section,

$$\frac{du_1}{dy} = 0, \quad \frac{du_1}{dz} = 0;$$

mais u_1 est nul à la paroi, donc il est nul partout.

Comparaison des lois de l'écoulement dans divers tubes de même forme (¹). — Signalons ici un résultat capital, quoiqu'il ne soit pas indispensable à notre sujet. Il montre comment, sans effectuer d'intégration, on peut obtenir les lois générales de l'écoulement, sauf à déterminer ensuite un coefficient numérique k .

Prenons un tube dont la surface de section égale l'unité. Nommons η et ζ les coordonnées d'un point de cette section; les coordonnées homologues y et z pour un tube quelconque de même forme et de section σ seront

$$y = \eta \sqrt{\sigma}, \quad z = \zeta \sqrt{\sigma}.$$

Si l'on veut exprimer des fonctions de y et de z et leurs dérivées avec les variables η et ζ , les formules de transformation seront

$$\frac{df}{dy} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{df}{d\eta}, \quad \frac{df}{dz} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{df}{d\zeta}, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = \frac{1}{\sigma} \frac{d^2f}{d\eta^2}, \quad \dots$$

Dans les équations qui régissent le mouvement dans tous les tubes en question, introduisons les variables indépendantes η et ζ relatives à $\sigma = 1$, à la place des autres plus générales y et z .

L'équation indéfinie (6) s'écrira

$$(9) \quad \frac{d^2 \frac{\varepsilon u}{\rho g \Gamma \sigma}}{d\eta^2} + \frac{d^2 \frac{\varepsilon u}{\rho g \Gamma \sigma}}{d\zeta^2} + 1 = 0,$$

(¹) Voir le Mémoire de M. Boussinesq du *Journal de Liouville*, p. 386, année 1868.

et l'équation simple aux limites, $u = 0$, deviendra

$$(10) \quad \frac{\varepsilon u}{\rho g \mathbf{I} \sigma} = 0 \quad (\text{à la paroi}).$$

Ces équations montrent que $\frac{\varepsilon u}{\rho g \mathbf{I} \sigma}$ est, pour tous les tubes en question, une même fonction f de η et ζ , ou de $\frac{y}{\sqrt{\sigma}}$ et de $\frac{z}{\sqrt{\sigma}}$; d'où

$$(11) \quad u = \frac{\rho g}{\varepsilon} \mathbf{I} \sigma f\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}}\right).$$

Aux points homologues de deux tubes de même forme, la vitesse est proportionnelle au carré des dimensions transversales, proportionnelle à la densité et à la pente motrice, inversement proportionnelle à ε .

Évaluons le débit Q . C'est :

$$\int_{\sigma} u \, d\sigma$$

ou

$$Q = \frac{\rho g \mathbf{I} \sigma}{\varepsilon} \iint f\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}}\right) dy \, dz = \frac{\rho g \mathbf{I} \sigma^2}{\varepsilon} \iint f\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}, \frac{z}{\sqrt{\sigma}}\right) \frac{dy}{\sqrt{\sigma}} \frac{dz}{\sqrt{\sigma}}.$$

L'intégrale est constante; c'est, en somme, une intégrale prise sur une section de surface un. Soit K sa valeur. On aura

$$(12) \quad Q = \frac{K \rho g \mathbf{I}}{\varepsilon} \sigma^2.$$

III. Application des principes précédents à l'étude du mouvement permanent et uniforme dans les tubes circulaires. — Je résumerai seulement, le cas des tubes circulaires étant exposé en détail dans plusieurs traités de Physique. L'axe des x sera, bien entendu, l'axe du tube et, celui des y , une horizontale perpendiculaire; u ne sera fonction que de la distance à l'origine $r = \sqrt{y^2 + z^2}$.

L'expression $\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}$ devient, en introduisant r à la place de y et z ,

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right);$$

et l'équation indéfinie s'écrit

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) + \frac{\rho g I}{\varepsilon} = 0.$$

Elle s'intègre immédiatement deux fois, et l'on détermine aisément les constantes d'intégration; de sorte que, si R est le rayon du tube, on a

$$u = \frac{\rho g I}{4\varepsilon} (R^2 - r^2).$$

D'où le débit

$$Q = \frac{\rho g I}{4\varepsilon} \frac{\sigma^2}{\pi} \int_{r=0}^{r=R} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) d\frac{r^2}{R^2} = \frac{\rho g I}{8\pi\varepsilon} \sigma^2.$$

Ce débit est constant sur toutes les sections, et comme les sections sont d'égale surface, la pente motrice I est constante tout le long du tube.

Ceci permet d'évaluer cette pente motrice en termes finis; son expression est, nous l'avons vu,

$$I = \sin i = \frac{d}{dx} \frac{p}{\rho g}.$$

Appelons h la hauteur, au-dessus d'un plan horizontal, d'un point quelconque de l'axe du tube. On aura

$$\sin i = - \frac{dh}{dx} \quad \text{et} \quad I = - \frac{d}{dx} \left(h + \frac{p}{\rho g} \right).$$

Cette dérivée en x est constante; aussi, si L désigne la longueur du tube, h_0 et p_0 , h_1 et p_1 les valeurs de h et p à l'entrée et à la sortie du tube, il s'ensuivra la formule simple

$$I = - \frac{1}{L} \left(h_1 - h_0 + \frac{p_1 - p_0}{\rho g} \right).$$

De là une nouvelle expression du débit, où l'on peut introduire aussi au lieu de σ le diamètre du tube :

$$(13) \quad Q = \frac{\pi}{128} \frac{\rho g}{\varepsilon} \frac{D^4}{L} \left(h_0 - h_1 + \frac{p_0 - p_1}{\rho g} \right).$$

Les expériences très précises de Poiseuille sur les tubes circulaires

ont donné exactement ces lois (1). Pour l'eau, ρg vaut 1000^{kg}, puisque l'unité de volume est le mètre cube, et la force de frottement ε , variable avec la nature du liquide, a été trouvée, par mètre carré, égale à 0^{kg}, 0001336 ou 0^{gr}, 1336, à la température de 10°. Darcy a vérifié ces mêmes lois en faisant usage de tubes beaucoup plus gros, jusqu'à 0^m, 03 de diamètre. Ces lois varient peu si l'on change le liquide; le mercure se comporte à peu près comme l'eau, preuve que, même pour ce liquide, la vitesse u est nulle à la paroi. (Voir p. 5 les hypothèses faites pour déterminer alors F.)

Tubes de forme plus complexe. — Esquissons encore la théorie des écoulements uniformes dans d'autres tubes. Cette étude est nécessaire, et voici pourquoi : il existe peu de tubes qui soient dans la pratique parfaitement circulaires. Dans ses expériences, Poiseuille mesurait toujours à chaque extrémité de ses tubes deux diamètres rectangulaires, qu'il trouvait légèrement différents et dont il prenait la moyenne. Une étude de l'écoulement dans les tubes peu elliptiques montrera que l'on peut, sans changer l'expression du débit, leur attribuer la forme circulaire et faire le rayon de la section égal à la demi-somme des axes. M. Boussinesq, pour étudier la question, change la fonction u en une autre ϖ reliée à u par l'équation

$$u = - \frac{\rho g I}{2\varepsilon} y^2 + \varpi.$$

L'équation indéfinie (6) et l'équation au contour $u = 0$ deviennent alors

$$(14) \quad \frac{d^2 \varpi}{dy^2} + \frac{d^2 \varpi}{dz^2} = 0$$

et

$$(15) \quad \varpi = \frac{\rho g I}{2\varepsilon} y^2 \quad (\text{sur le contour}).$$

Le problème qui se pose est celui qu'on nomme *problème de Dirich-*

(1) Le débit Q est proportionnel à la charge totale dépensée, au poids de l'unité de volume du fluide, à la quatrième puissance du diamètre du tube, et à un coefficient que nous allons voir dépendre de la section du tube, enfin, inversement proportionnel à ε et à la longueur du tube.

let; il se présente souvent en Physique mathématique. On arrive rapidement au but, dans le cas qui nous occupe, à l'aide d'une méthode ingénieuse due à M. de Saint-Venant. Le principe en est celui-ci : une fonction $f(y \pm z\sqrt{-1})$ satisfait à l'équation de Laplace dans le plan. Or, si nous donnons à f l'une des deux formes

$$\frac{(y + z\sqrt{-1})^n - (y - z\sqrt{-1})^n}{2}, \quad \frac{(y + z\sqrt{-1})^n + (y - z\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}},$$

nous aurons deux solutions particulières de l'équation indéfinie qui s'écriront

$$(I) \quad \varpi = y^n - \frac{n(n-1)}{1.2} y^{n-2} z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} y^{n-4} z^4 - \dots,$$

$$(II) \quad \varpi = n y^{n-1} z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} y^{n-3} z^3 + \dots;$$

ces solutions, pour $n = 0, 1, 2, \dots, n$, prendront diverses expressions. Il faudra développer ϖ en série à l'aide de ces solutions, ce qui donnera

$$\varpi = A_0 + A_1 y + B_1 z + A_2 y^2 + z^2 (+ B_2 (2yz) + A_3 (y^3 - 3yz^2) + \dots,$$

où $A_0, A_1, B_1, \dots$ sont des constantes arbitraires à déterminer d'après la condition au contour. La méthode pratique et simple consistera à obliger ce développement de ϖ à satisfaire à la condition (15), seulement en certains points du contour suffisamment voisins les uns des autres. En ne prenant dans ϖ qu'un petit nombre de termes, on remplira souvent ce but.

Soit donc $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ l'équation de la section elliptique de notre tube. Il y a sur cette ellipse quatre points remarquables, les extrémités des axes se présentant pour

$$\begin{cases} y^2 = 0, & y^2 = b^2, \\ z^2 = c^2, & z^2 = 0. \end{cases}$$

Faisons en sorte que, en ces points, l'équation aux limites soit satisfaite par ϖ , ou que ϖ y soit égal à la valeur

$$\frac{\rho g I}{2\varepsilon} y^2.$$

Pour cela, prenons seulement dans ϖ les quatre premiers termes et substituons-y successivement à y et à z les coordonnées indiquées des extrémités des axes. Les quatre équations à former se réduiront à deux, puisqu'elles auront, deux par deux, leurs termes de degré impair, en A_1 ou B_1 , égaux et de signe contraire; d'où $A_1 = 0$, $B_1 = 0$. On écrira donc, pour déterminer A_0 et A_2 , les équations

$$\begin{aligned} A_0 - A_2 c^2 &= 0, \\ A_0 + A_2 b^2 - \frac{\rho g I}{2\varepsilon} b^2. \end{aligned}$$

Elles donneront

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{\rho g I}{2\varepsilon} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2}, \\ A_2 &= \frac{\rho g I}{2\varepsilon} \frac{b^2}{b^2 + c^2}, \end{aligned}$$

et l'on aura en fin de compte, pour la valeur de u ,

$$(16) \quad u = \frac{\rho g I}{2\varepsilon} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

Or, il se trouve que la parenthèse est nulle sur le contour ou à la paroi, en vertu de l'équation même de ce contour. Donc, la vitesse u ainsi déterminée est nulle sur toute la paroi. La valeur générale est donc plus qu'approximative, elle est exacte.

Les courbes d'égale vitesse sont des ellipses semblables à la section du tube et de mêmes axes, car, si l'on fait $u = \text{const.}$, on a

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \text{une constante } \varphi.$$

Débit du tube. — De plus, l'aire d'une de ces ellipses a pour expression $\pi b c \varphi$, et l'aire d'une couronne elliptique élémentaire sera $\pi b c d \varphi$. La vitesse de translation sur une telle couronne est donnée par la formule (16). C'est

$$u = \frac{\rho g I}{2\varepsilon} \frac{b^2 c^2}{b^2 + c^2} (1 - \varphi).$$

Pour avoir le débit, il faut multiplier cette vitesse par l'aire $\pi b c d \varphi$

et intégrer de 0 à 1. Il viendra

$$(17) \quad Q = \frac{\rho \sigma^2}{4\varepsilon} \frac{1}{b^2 + c^2} \frac{bc}{\pi}.$$

Le paramètre K est ici $\frac{1}{4\pi \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)}$ ou $\frac{1}{4\pi \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)}$, en posant $\frac{b}{c} = \alpha$.

Le minimum du dénominateur a lieu quand sa dérivée est nulle, ou pour $\alpha = 1$. Le débit est donc maximum quand $b = c$ et que l'on a à faire à un cercle; alors $K = \frac{1}{8\pi}$.

Il résulte de là que, si l'un des coefficients b ou c varie peu, la quantité K , aux environs de son maximum, a ses variations du second ordre. Remarquons d'ailleurs que, si l'on considère la section comme un cercle dont le rayon est la demi-somme des axes b et c , l'aire de ce cercle égalera l'aire de l'ellipse, au second ordre près. Car, par définition,

$$b = R(1 + \zeta), \quad c = R(1 - \zeta);$$

ζ étant infiniment petit, l'aire $\pi bc = \pi R^2(1 - \zeta^2) = \pi R^2$.

En vertu de ces deux remarques, on voit de suite que la formule qui donne le débit indique que celui du tube elliptique égalera celui du tube circulaire de rayon $R = \frac{b+c}{2}$, au second ordre près.

Observons que, dans un tube elliptique, la vitesse maxima est celle du filet central; elle est le double de la vitesse moyenne. Signalons aussi, en terminant, que la méthode précédente s'applique avec le même succès à des tubes de sections d'autres sortes. Dans un tube triangulaire équilatéral, par exemple, on trouve que $K = 0,029$; la vitesse maxima y est réduite aussi, mais moins que la vitesse moyenne. D'ailleurs, le cercle et le triangle étant les polygones réguliers convexes les plus différents, il est certain que tout tube à section polygonale régulière donnera des résultats compris entre celui des tubes circulaires et celui des tubes triangulaires. Mais ceci sort du sujet; nous avons donné toutes les notions nécessaires sur les écoulements en régime uniforme.



CHAPITRE I.

COMMENT ON ARRIVE, PAR LES MÉTHODES DE M. BOUSSINESQ, AUX LOIS QUI RÉGISSENT
LES MOUVEMENTS VARIÉS DES LIQUIDES A L'ENTRÉE DES TUBES.

§ 1. Ces préliminaires permettent de poser nettement les principes de la théorie du mouvement permanent varié que je vais définir. Quand un liquide s'écoule hors d'un réservoir en mince paroi par un orifice circulaire, la veine liquide formée se contracte d'une manière continue depuis la paroi jusqu'à une certaine distance. Imaginons un ajutage moulé exactement sur cette portion de la veine liquide et continué à partir de la section contractée par un tube cylindrique. Admettons, ce qui n'est pas très loin de la vérité, que les frottements que subit le liquide jusqu'à la section contractée soient négligeables; il en résultera, en vertu du principe de Daniel Bernoulli, que les vitesses des filets liquides à l'entrée du tube seront toutes sensiblement égales et parallèles. Ces filets perdront quelque peu et pendant un moment leur parallélisme pour le reprendre bientôt. Leurs diverses vitesses ne différeront guère plus alors de ce qu'elles sont en régime uniforme. Cette sorte de passage d'un régime à un autre sous l'action des frottements influe sur la vitesse moyenne d'écoulement (ou sur le débit du tube). Pour étudier les lois qui régissent ce passage, il faut avoir recours aux équations aux dérivées partielles données plus haut, applicables au mouvement permanent non uniforme.

Ces équations sont

$$(1) \quad \frac{\varepsilon}{\rho g} \left(\frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right) + 1 = \frac{u'}{g},$$

à laquelle il faut joindre l'équation de continuité.

On aura à tenir compte des conditions au contour, $u=0, v=0, w=0$.

Ces équations paraissent très difficiles à intégrer. M. Boussinesq, par une suite d'heureuses transformations, donne, comme on verra ci-après, une équation qui détermine à une première approximation la

vitesse moyenne ou de débit du tube ('). Toutes ses conclusions jusque-là sont d'ailleurs indépendantes de la forme du tube, si l'on peut admettre réalisées les conditions exposées un peu plus haut (l'orifice, l'ajutage et le tube se correspondant). La recherche rigoureuse de cette vitesse de débit et même l'étude complète du mouvement se ramènent ensuite à une équation aux dérivées partielles que l'on simplifie beaucoup, en négligeant les termes petits d'ordre supérieur au premier. Je vais exposer la méthode.

§ 2. Multiplions par $d\sigma = dy dz$ l'équation (1), intégrons à travers toute la section σ et divisons par σ . Il vient

$$(2) \quad \frac{\varepsilon}{\rho g \sigma} \int_{\chi} \frac{du}{dn} d\chi + 1 = \frac{1}{g} \int_{\sigma} u' \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Le premier terme est égal au frottement extérieur total changé de signe et divisé par $\rho g \sigma$ ou rapporté à l'unité de poids du fluide occupant le tube. On sait en effet (p. 4) que le frottement extérieur est, par unité de longueur du contour et du tube, $-\varepsilon \frac{du}{dn}$. Notre but sera d'éliminer ce terme.

Éliminons d'abord 1 entre (1) et (2) et introduisons la vitesse moyenne $U = \int_{\sigma} u \frac{d\sigma}{\sigma}$. Faisons en sorte que les équations tant indéfinies qu'aux limites régissant le mouvement, au lieu de donner u , donnent le mode de distribution des vitesses dans une section, ou le rapport $\frac{u}{U}$.

Nous aurons

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \frac{u}{U}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{u}{U}}{dz^2} - \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d \frac{u}{U}}{dn} d\chi = \frac{\rho}{\varepsilon U} \left(u' - \int_{\sigma} u' \frac{d\sigma}{\sigma} \right), \\ \frac{u}{U} = 0 \text{ (à la paroi)}, \quad \int_{\sigma} \frac{u}{U} \frac{d\sigma}{\sigma} = 1. \end{array} \right.$$

Si le régime était uniforme, u' y serait nul, et en nommant φ le rap-

(1) Mémoire de M. Boussinesq, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 9 juin 1890, t. CX, p. 1160.

port $\frac{u}{U}$, ces relations deviendraient

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d\varphi}{dn} d\chi = 0, \\ \varphi = 0 \text{ (à la paroi)}, \quad \int_{\sigma} \varphi \frac{d\sigma}{\sigma} = 1. \end{array} \right.$$

La fonction φ , évidemment indépendante, pour chaque forme de σ , de ses dimensions absolues, non moins que de la nature du fluide, se réduit, dans le cas usuel d'un tube circulaire, de rayon R , à

$$(5) \quad \varphi = 2 \left(1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right) = 2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

pour les points situés à la distance quelconque r de l'axe. En désignant par ϖ le petit excédent

$$(6) \quad \varpi = \frac{u}{U} - \varphi,$$

expression des écarts qui existent entre les deux modes de distribution des vitesses dans les deux régimes uniforme et varié, il viendra, si l'on retranche les diverses relations (4) de leurs correspondantes (3)

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \varpi}{dy^2} + \frac{d^2 \varpi}{dz^2} - \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d\varpi}{dn} d\chi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon l} \left(u' - \int_{\sigma} u' \frac{d\sigma}{\sigma} \right), \\ \varpi = 0 \text{ (à la paroi)}, \quad \int_{\sigma} \varpi d\sigma = 0. \end{array} \right.$$

Nous voulons, je le rappelle, tirer de la formule (2), en éliminant son premier terme, la relation promise entre la pente motrice I et la vitesse moyenne U ou sa dérivée en x . Or, les premières relations des systèmes (4) et (7) vont nous permettre d'exprimer ce terme en fonction de quantités plus facilement évaluables. Ajoutons ces équations, après les avoir multipliées respectivement par $-\varpi d\sigma$ et $\varphi d\sigma$. Puis intégrons les résultats dans toute l'étendue σ , en observant que les deux différences

$$\left[\varphi \frac{d^2 \varpi}{(dy^2, dz^2)} - \varpi \frac{d^2 \varphi}{(dy^2, dz^2)} \right] d\sigma \quad \text{ou} \quad \frac{d}{d(y, z)} \left[\varphi \frac{d\varpi}{d(y, z)} - \varpi \frac{d\varphi}{d(y, z)} \right] d\sigma$$

produisent simplement des intégrales prises le long du contour χ et

donnent en tout $\int_{\chi} \left(\varphi \frac{d\varpi}{dn} - \varpi \frac{d\varphi}{dn} \right) d\chi$, résultat nul en vertu des secondes relations de chacun des systèmes (4) et (7). Il vient ainsi, eu égard aux troisièmes relations de ces mêmes systèmes, puis à l'expression (6) de ϖ ,

$$(8) \quad - \int_{\chi} \frac{d\varpi}{dn} d\chi \quad \text{ou} \quad - \frac{1}{U} \int_{\chi} \frac{du}{dn} d\chi + \int_{\chi} \frac{d\varphi}{dn} d\chi = \frac{\rho\sigma}{\varepsilon U} \int_{\sigma} (\varphi - 1) u' \frac{d\sigma}{\sigma};$$

équation d'où l'on tire, en appelant K l'expression positive,

$$(9) \quad K = - \int_{\chi} \frac{d\varphi}{dn} d\chi,$$

constante pour toutes les sections semblables et égale, d'après (5), à 8π pour les sections circulaires,

$$(10) \quad \int_{\chi} \frac{du}{dn} d\chi = -KU - \frac{\rho\sigma}{\varepsilon} \int_{\sigma} (\varphi - 1) u' \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Or, cette valeur de $\int_{\chi} \frac{du}{dn} d\chi$, portée dans l'équation (2) du mouvement, lui donne la forme très simple

$$(11) \quad I = K \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{U}{\sigma} + \frac{1}{g} \int_{\sigma} \varphi u' \frac{d\sigma}{\sigma},$$

où il ne reste plus qu'à évaluer le dernier terme.

En dédoublant en deux autres ce dernier terme, on a

$$\frac{1}{gU\sigma} \left(\int_{\sigma} uu' d\sigma - U \int_{\sigma} \varpi u' d\sigma \right).$$

A partir de l'entrée du tube, $U\varpi$ devient bien vite fort petit par rapport à u ; on pourra donc négliger le second terme de la parenthèse par rapport au premier à une première approximation. De plus, remarquons que $u' = \lim \frac{\partial u}{\partial t}$, c'est-à-dire $\lim \frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\delta x}{u}}$, δu étant la variation pen-

dant le temps δt de la vitesse u d'une molécule, et δx , l'espace qu'elle

a parcouru pendant ce même temps *dans le sens des x*. Cela permet d'écrire l'élément d'intégrale $uu' d\sigma$ sous la forme

$$\frac{u}{2} \frac{d\sigma}{\frac{\partial}{\partial x}} \frac{\partial u^2}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{d}{\partial x} (u^3 d\sigma),$$

car $\delta(u d\sigma) = 0$, en tant que changement du débit d'un même filet.

Et l'intégrale $\int_{\sigma} uu' d\sigma$ prend finalement la forme $\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \int_{\sigma} u^3 d\sigma$. Introduisons le rapport moyen du cube des vitesses des divers filets au cube de la vitesse moyenne U , coefficient que les hydrauliciens appellent α ; l'expression précédente deviendra

$$\frac{d}{dx} \frac{\alpha U^3 \sigma}{2} = U \sigma \frac{d}{dx} \left(\alpha \frac{U^2}{2} \right),$$

puisque $U\sigma$ est constant. L'équation (11) se transforme, en se rappelant l'expression de I (voir p. 3); et il vient

$$(12) \quad \frac{d}{dx} \left(h + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = -K \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{U}{\sigma}.$$

Le coefficient α se calcule aisément pour un écoulement en régime uniforme dans un tube circulaire. Cherchons sa valeur qui sera nécessaire plus loin. La formule (5) [p. 15] donne φ qui désigne $\frac{u}{U}$: donc

$$\frac{u^3}{U^3} = \varphi^3 = 8 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3.$$

Or

$$\alpha = \int_{\sigma} \frac{u^3}{U^3} \frac{d\sigma}{\sigma} = 8 \int_0^R \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right)^3 d \frac{r^2}{R^2},$$

en appelant R le rayon du tube.

Posons, pour intégrer, $\frac{r^2}{R^2} = \varepsilon$: cela fournira

$$(13) \quad \alpha = 8 \int_0^1 (1 - \varepsilon)^3 d\varepsilon = 2.$$

Remarque. — La quantité entre parenthèse dans (12) exprime la charge totale. En effet, la charge d'un filet, définie par le principe de Daniel Bernoulli est

$$h + \frac{p}{\rho g} + \frac{u^2}{2g}.$$

Multiplions-la par $\frac{dQ}{Q} = \frac{u d\sigma}{U\sigma}$ et intégrons à travers toute la section; nous aurons une moyenne de cette expression que nous pourrons appeler *hauteur totale de charge du courant*, et qui sera (1)

$$(14) \quad h + \frac{p}{\rho g} + \frac{1}{U} \int_{\sigma} \frac{u^3}{2g} \frac{d\sigma}{\sigma} = h + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha U^2}{2g}.$$

L'équation (12) signifie donc que le régime permanent graduellement varié, dans un tube fin, entraîne par unité de longueur du courant la même perte de charge $K \frac{\varepsilon}{\rho g} \frac{U}{\sigma}$ qu'un régime uniforme avec même section fluide σ et même vitesse moyenne U . Seulement, le coefficient α affectant, dans l'expression de la charge totale, la hauteur due à cette vitesse moyenne, devient variable suivant d'autres lois qu'en l'absence des frottements, et s'écarte plus ou moins de sa valeur relative au cas du régime uniforme, qui serait 2, avons-nous vu, pour une section circulaire.

Détermination de la vitesse de débit (2). — Plaçons-nous dans le cas d'un tube circulaire; alors $K = 8\pi$. Il nous suffit d'intégrer l'équation précédente entre les deux abscisses limites zéro (correspondant à la section contractée) et L (définissant un point quelconque du tube). Au sortir du réservoir, avons-nous dit, la vitesse U est commune à tous les filets; l'expression entre parenthèses $\left(h + \frac{p}{\rho g} + \alpha \frac{U^2}{2g}\right)$, qui est l'intégrale du premier membre de (12), est sensiblement égale à $\left(h + \frac{p}{\rho g} + \frac{U^2}{2g}\right)$. En vertu du principe de Daniel Bernoulli, cette expression a la valeur même qu'elle aurait en un point du réservoir où la vitesse serait nulle, savoir $h_0 + \frac{p_0}{\rho g}$.

Pour $x = L$ assez grand, le régime est uniforme, $\alpha = 2$ et la même

(1) Cette notion n'est pas uniquement propre aux écoulements où les frottements ont une grande influence. Quand, dans un liquide qui s'écoule, les vitesses des divers filets ne sont pas toutes égales, le coefficient α et l'expression (14) s'introduisent naturellement.

(2) Voir le Mémoire de M. Boussinesq, inséré aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 16 et 23 juin 1890, t. CX, p. 1238, 1242, 1292.

expression est

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U^2}{g}.$$

L'intégration, effectuée, donne ainsi, pour déterminer U,

$$(15) \quad \frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2} + \frac{U^2}{g} = (h_0 - h_1) + \frac{p_0 - p_1}{\rho g}.$$

Le second membre est l'expression de la charge totale dépensée. Si le tube est assez long, le second terme du premier membre disparaît à côté du premier, et l'équation exprime les lois déduites par Poiseuille de sa première série d'expériences (V. p. 9). D'ailleurs, ce second terme a été reconnu être à peu près ce qu'il fallait pour expliquer tous les résultats de la deuxième série (1), une légère correction étant pourtant nécessaire.

§ 3. La théorie permet une approximation plus complète. — Cette petite divergence devait, en effet, se prévoir. Pour obtenir l'équation (12), nous avons négligé, dans (11), le terme $\frac{1}{g} \int (-\varpi) u' \frac{d\sigma}{\sigma}$. Ce terme, où ϖ est loin d'être nul *pour les sections du tube voisines du réservoir*, est positif, c'est-à-dire du signe de $\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha U^2}{2g} \right) = \frac{U^2}{2g} \frac{dx}{dx}$; car, aux points où $-\varpi = \varphi - \frac{u}{U}$ est positif, la vitesse u s'accroît en général, et alors u' est aussi positif; pour la même raison, ces deux facteurs sont négatifs à peu près à la fois. Le premier cas est relatif au centre des sections; le second, aux parties voisines de la paroi.

Le terme $\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2}$ dans (15) étant la charge absorbée sur une longueur L de tube où coule un liquide en régime uniforme, $\frac{U^2}{g}$ augmenté de sa correction représentera la charge dépensée supplémentaires quand le régime uniforme s'établit.

M. Boussinesq cherche, pour exprimer la correction, à déterminer ϖ . Cette quantité satisfait à une équation aux dérivées partielles qu'il forme comme nous allons le voir.

(1) J'exposerai ces expériences au commencement du Chapitre IV.

Considérons le développement de l'accélération $u' = u \frac{du}{dx} + \omega \frac{du}{dr}$, ω étant la petite composante radiale de la vitesse de la molécule, qui ne peut d'ailleurs se mouvoir que dans un plan passant par l'axe du tube. Exprimons u' en fonction de ϖ ; pour cela, remplaçons ω par l'expression $-\frac{1}{r} \int_0^r \frac{du}{dx} r dr$, donnée par l'équation de conservation des volumes fluides, et u par $U(\varphi + \varpi)$. En négligeant tous les termes du second degré contenant ϖ ou ses dérivées, il viendra

$$(16) \quad u' = U^2 \left(\varphi \frac{d\varpi}{dx} - \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \int_0^r \frac{d\varpi}{dx} r dr \right) = 2U^2 \left[\left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{d\varpi}{dx} + \int_0^r \frac{d\varpi}{dx} \frac{2r dr}{R^2} \right].$$

On élimine l'intégrale en dérivant en r et l'on a

$$(17) \quad \frac{du'}{dr} = 2U^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{d^2\varpi}{dx dr}.$$

La première équation (7), différenciée en r , donne de son côté, si l'on se souvient que, dans le cas présent, $\frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varpi}{dr} \right)$,

$$(18) \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varpi}{dx} \right) \right] = \frac{\rho}{\varepsilon U} \frac{du'}{dr}.$$

Cette équation n'est pas plus générale que l'équation (7) dont elle dérive, car celle-ci peut se déduire de (18). En effet, l'équation (18), intégrée en r , donnerait

$$(19) \quad \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varpi}{dx} \right) = \frac{\rho}{\varepsilon U} u' + f(x),$$

$f(x)$ étant une fonction arbitraire de x qu'il faut introduire, puisque les fonctions $\left(r \frac{d\varpi}{dr} \right)$ et u' qui figurent dans (18) dépendent de r et de x .

Prenons la moyenne des deux membres de (19) pour tous les filets fluides. Comme d'ailleurs

$$\int_{\sigma} \left(\frac{d^2\varpi}{dy^2} + \frac{d^2\varpi}{dz^2} \right) \frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d\varpi}{dn} d\chi,$$

nous aurons

$$(20) \quad \frac{1}{\sigma} \int_{\chi} \frac{d\varpi}{dn} d\chi = \frac{\rho}{\varepsilon U} \int_{\sigma} u' \frac{d\sigma}{\sigma} + f(x).$$

Or $f(x)$, tiré de cette équation et remplacé dans (19), reproduit l'équation (7).

En combinant (17) et (18), on obtient

$$(21) \quad \frac{2\rho U}{\varepsilon} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \frac{d}{dx} \frac{d\varpi}{dr} = \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varpi}{dr} \right) \right],$$

équation aux dérivées partielles relativement simple qui, jointe aux équations aux limites $r=0$, $r=R$, $x=0$, $x=\infty$, déterminera complètement la fonction ϖ .

On peut encore simplifier beaucoup l'équation (21), en divisant par $8r$, et en introduisant comme variable $\nu = \frac{r^2}{R^2}$; ce qui donne

$$(22) \quad \rho \frac{UR^2}{2\varepsilon} \frac{1-\nu}{\nu} \frac{d}{dx} \left(\nu \frac{d\varpi}{d\nu} \right) = \frac{d^2}{d\nu^2} \left(\nu \frac{d\varpi}{d\nu} \right).$$

On rencontre, en Physique mathématique, des équations indéfinies analogues : $\left(\nu \frac{d\varpi}{d\nu} \right)$ étant considéré, dans celle-ci, comme fonction à déterminer, elle pourrait régir la température d'une barre prismatique d'une conductibilité constante 1, mais d'une capacité calorifique variable égale à $\frac{\rho UR^2}{2\varepsilon} \frac{1-\nu}{\nu}$.

Équations aux limites à adopter. — Dans le cas qui nous occupe, nous avons, comme équations aux limites :

1° Limites relatives à ν :

$$(23) \quad \begin{cases} \text{pour } \nu = 0, & \nu \frac{d\varpi}{d\nu} = 0; \\ \text{pour } \nu = 1, & \int_0^1 \left(\nu \frac{d\varpi}{d\nu} \right) d\nu = (\varpi \nu)_0^1 - \int_0^1 \varpi d\nu = 0. \end{cases}$$

Car, d'une part, $\varpi \nu = 0$ pour $\nu = 0$, et aussi pour $\nu = 1$, puisqu'alors $\varpi = 0$; d'autre part, $\int_0^1 \varpi d\nu = 0$, comme représentant la valeur moyenne de ϖ sur la section σ .

2° Limites relatives à x :

$$(24) \quad \text{pour } x = 0, \quad \varpi = 2\nu - 1.$$

En effet, faisons $x = 0$ dans la formule (6) qui définit ϖ . Alors,

par hypothèse, tous les filets fluides ont même vitesse (sauf aux très petites distances de la paroi, où u décroît vite pour s'y annuler); donc u égale U , d'où $\frac{u}{U} = 1$; de plus, $\varphi = 2(1 - \varepsilon)$ est indépendant de x .

(24 bis) Pour $x = \infty$, $\varpi = 0$,

en vertu de la même formule (6).

Intégration de l'équation (22). — Comme dans le problème analogue sur le mouvement de la chaleur, on forme l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles par la superposition d'une infinité de solutions simples (produits d'une fonction de x par une fonction correspondante de ε). En posant

$$(25) \quad \varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon} = c e^{\frac{2\varepsilon m x}{\rho U R^2}} \Psi(\varepsilon), \text{ avec } m > 0,$$

on pourra déterminer $\Psi(\varepsilon)$, pour chaque valeur de m , par l'équation, transformée de (22),

$$(26) \quad \varepsilon \Psi'' + m(1 - \varepsilon) \Psi = 0.$$

L'équation (26) a deux solutions particulières qui donnent naissance chacune à une catégorie d'expressions de la forme (25), et m peut prendre une infinité de valeurs.

Nous devons nous arranger de façon que le développement de $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$, formé linéairement à l'aide de toutes ces expressions, satisfasse aux équations aux limites.

La condition aux limites $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right) = 0$ pour $\varepsilon = 0$, sera satisfaite si l'on a

$$(27) \quad \Psi(0) = 0;$$

car toutes les solutions simples seront nulles pour $\varepsilon = 0$.

De même, on aura nécessairement $\int_0^1 \left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon = 0$, si pour $\varepsilon = 1$

$$(28) \quad \int_0^1 \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0,$$

et nous pourrons encore disposer des constantes c de manière à remplir les autres conditions aux limites.

Déterminons m de façon que $\Psi(\varepsilon)$ obéisse à l'équation (28), car $\psi(0)$ devra être nul, quel que soit m . Mais, en supposant remplie cette dernière condition, $\Psi(\varepsilon)$ ne sera déterminé qu'à un facteur constant près, déjà contenu implicitement dans c . Nous pouvons donc choisir ce facteur à volonté, nous le ferons en ajoutant la condition $\Psi'(0) = 1$.

On peut développer en série une solution particulière de l'équation (26). Cette solution rend nul $\Psi'(0)$, quel que soit m ; elle servira donc à former l'expression de $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$. Nous verrons que l'autre solution particulière de (26) ne jouit pas de la même propriété. Heureusement, on peut, à l'aide de la première, former une série d'expressions de la forme (25), suffisant à définir complètement $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$.

Remarque. — On sait que le procédé d'intégration exposé ci-dessus a été imaginé par Fourier. Dans un grand nombre de problèmes, ce géomètre a déterminé une fonction V satisfaisant à une équation aux dérivées partielles à deux variables x et ε , comme nous l'avons dit, par la superposition d'une infinité de solutions simples, produits d'une fonction de x par une fonction de ε . Il pouvait arriver, comme dans le cas qui nous occupe, que la fonction de l'une des variables, ε par exemple, fût définie par une équation différentielle du second ordre. Or, l'une des deux solutions particulières de cette équation pouvait seule, en général, satisfaire à l'équation aux limites, telle que (27).

CHAPITRE II.

ÉTUDE ET DISCUSSION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE (26).

§ 4. *Intégration de cette équation.* — La meilleure méthode pour développer complètement une solution particulière de l'équation différentielle

$$(29) \quad \Psi\varepsilon'' + m(1-\varepsilon)\Psi = 0$$

consiste à poser

$$(30) \quad \Psi = e^{-\varepsilon \sqrt{m}} \varphi;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi}{d\varepsilon} &= e^{-\varepsilon \sqrt{m}} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} - \sqrt{m} e^{-\varepsilon \sqrt{m}} \varphi, \\ \frac{d^2\Psi}{d\varepsilon^2} &= e^{-\varepsilon \sqrt{m}} \left(\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} - 2\sqrt{m} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} + m\varphi \right); \end{aligned}$$

d'où aussi la relation transformée

$$\varepsilon \left(m\varphi - 2\sqrt{m} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} + \frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} \right) + m(1-\varepsilon)\varphi = 0,$$

ou

$$(31) \quad \varepsilon \frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} - 2\sqrt{m} \varepsilon \frac{d\varphi}{d\varepsilon} + m\varphi = 0,$$

qui rentre à peu près dans le type de celles qui définissent les fonctions de Gauss, sans s'y ramener exactement. On peut en mettre facilement une solution simple sous forme de série hypergéométrique.

Il faut évaluer φ au développement

$$\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon + \alpha_2 \varepsilon^2 + \dots + \alpha_n \varepsilon^n + \dots;$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\varepsilon} &= \alpha_1 + 2\alpha_2 \varepsilon + \dots + n\alpha_n \varepsilon^{n-1} + \dots, \\ \frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2} &= 1.2\alpha_2 + 2.3\alpha_3 \varepsilon + \dots + n(n+1)\alpha_{n+1} \varepsilon^{n-1} + \dots, \end{aligned}$$

puis, substituer ces séries dans (31) et évaluer à 0 les coefficients des différentes puissances de ε .

Celui de ε^n égalé à 0 donne, en particulier, la formule

$$(32) \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n \frac{2n\sqrt{m} - m}{n(n+1)} = -\alpha_n \sqrt{m} \frac{\sqrt{m} - 2n}{n(n+1)};$$

ce qui, si l'on remarque que $\alpha_0 = 0$ nécessairement, et si l'on fait $\alpha_1 = 1$ (comme il est convenu), donne, pour la série,

$$(33) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi &= \varepsilon - \frac{\sqrt{m}(\sqrt{m}-2)}{2} \varepsilon^2 + \frac{m(\sqrt{m}-2)(\sqrt{m}-4)}{2^2.3} \varepsilon^3 - \dots \\ &+ \frac{m^n(\sqrt{m}-2)\dots(\sqrt{m}-4n)}{(2n!)^2(2n+1)} \varepsilon^{2n+1} - \dots; \end{aligned} \right.$$

le dernier terme indiqué est de rang $2n+1$.

Nous avons dans cette série, pour rapport d'un terme au précédent, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \varepsilon$, rapport égal, en vertu de (32), à l'expression

$$-\sqrt{m} \left(\frac{\sqrt{m}}{n(n+1)} - \frac{2}{n+1} \right) \varepsilon,$$

qui tend évidemment vers 0 quand n augmente, quels que soient ε et $\sqrt{m}$, pourvu qu'ils soient finis. La série est donc toujours convergente; et la valeur correspondante de Ψ a la forme

$$(34) \quad \Psi = e^{-\varepsilon\sqrt{m}} \left[\varepsilon - \frac{\sqrt{m}(\sqrt{m}-2)}{2} \varepsilon^2 + \dots \right].$$

C'est bien là la solution particulière dont nous avons besoin. Quel que soit m , cette solution est nulle pour $\varepsilon = 0$ et permet, par le fait, de satisfaire aux équations $\Psi(0) = 0$ et $\Psi'(0) = 1$; m reste à notre disposition pour satisfaire à l'autre équation aux limites,

$$\int_0^1 \Psi(\varepsilon) d\varepsilon = 0.$$

On verra ci-dessous que l'autre solution particulière de (29) ne peut concourir à former $\left(\varepsilon \frac{d\varphi}{d\varepsilon} \right)$. Pour étudier cette solution, j'avais essayé de la former en développant la seconde solution de (31); mais cette dernière opération m'a été impossible. L'équation (31), qui semble n'être qu'un cas particulier des équations de Gauss dont on forme aisément deux solutions particulières, ne peut se ramener à ces dernières. Cela tient justement à ce que le coefficient de $\frac{d^2\varphi}{d\varepsilon^2}$ n'y a pas de terme en ε^2 .

En posant, par exemple, dans (31), $\varphi = \varepsilon\chi$ ou $\varphi = \varepsilon^2\chi$, on retombe sur d'autres équations qui n'apprennent rien à ce point de vue. Faisons-y, pour fixer les idées, $\varphi = \varepsilon^2\chi$, nous aurons

$$(35) \quad \varepsilon^2 \frac{d^2\chi}{d\varepsilon^2} + (4\varepsilon - 2\sqrt{m}\varepsilon^2) \frac{d\chi}{d\varepsilon} + (m\varepsilon - 4\sqrt{m}\varepsilon + 2)\chi = 0;$$

mais, si l'on essaye d'intégrer cette équation par le procédé employé pour (31), ou, pour mieux dire, d'en développer une solution particulière, on trouve que tous les coefficients du développement sont nuls.

On peut néanmoins, sans former la deuxième solution de (29), montrer qu'elle ne convient pas au problème.

§ 5. Sur la solution particulière inconnue de l'équation (29). — Il faut savoir à quoi se réduit la solution en question pour $\varepsilon = 0$. La marche à suivre est analogue à celle qu'on emploie pour connaître la deuxième solution particulière satisfaisant aux équations qui définissent les fonctions cylindriques ou fonctions de Fourier. Ces fonctions se mettent notamment, pour ε voisin de 0, sous la forme ε^ν multiplié par une certaine intégrale définie. A l'aide de la formule à employer pour avoir la solution générale d'une équation différentielle dont on a une solution particulière, on démontre alors que l'autre solution particulière devient infinie quand ε tend vers 0.

D'ailleurs, si l'équation différentielle dont on doit former la solution générale est telle que (29), privée du terme contenant la dérivée première, il suffit d'en connaître une solution particulière α pour mettre la solution générale sous la forme

$$(36) \quad \Psi = \alpha \left(c \int \frac{d\varepsilon}{\alpha^2} + \text{const.} \right)$$

Nous ne recherchons ici la solution inconnue que pour les petites valeurs de ε et, par conséquent, nous n'avons à considérer la solution α que pour ε voisin de 0. Or α est le produit d'une exponentielle en ε par une série convergente ordonnée suivant les puissances croissantes de ε . Nous pouvons donc, d'une part, réduire l'exponentielle à l'unité, d'autre part, ne conserver de la série que son premier terme.

Ces simplifications réduisent α à ε , lorsque ε est petit. Appliquons la formule (36) en y faisant $\alpha = \varepsilon$; d'ailleurs $\int \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} = -\frac{1}{\varepsilon}$. L'expression cherchée $\alpha \int \frac{d\varepsilon}{\alpha^2}$ tend donc vers -1 lorsque ε tend vers 0 (1).

(1) Il semble qu'il suffirait, pour intégrer l'équation (29), d'employer d'une façon brute la transformation de Laplace. On aurait ainsi au moins une solution particulière exprimée en intégrale définie. Voici l'essai que j'ai fait de ce procédé, qui ne m'a donné aucun résultat :

Posons

$$(1) \quad \Psi = \int_{\alpha}^{\beta} V e^{\varepsilon z} dz,$$

L'intégration par parties donne les formules

$$\varepsilon \Psi = \left[e^{\varepsilon z} V \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{\varepsilon z} \frac{dV}{dz} dz, \quad \varepsilon \frac{d^2 \Psi}{d\varepsilon^2} = \left[e^{\varepsilon z} V z^2 \right]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} e^{\varepsilon z} \frac{d(V z^2)}{dz} dz.$$

Remarque. — La transcendante Ψ , calculée par la première méthode que j'ai proposée, doit être soumise à l'équation caractéristique

$$\int_0^1 \Psi dx = 0,$$

équation en m qui ne se forme qu'à l'aide d'intégrations par parties dont le nombre augmente de plus en plus, chaque fois que l'on veut prendre un terme de plus de Ψ dans le premier membre. Cela tient au facteur $e^{-x\sqrt{m}}$. Pour l'application que nous devons faire, on peut supprimer ces intégrations par parties qui donnent naissance

On déterminera les limites de façon à annuler les termes tout intégrés. On voit aisément qu'il y a lieu de prendre $-\infty$ et $\pm\sqrt{m}$ si x est toujours > 0 . Moyennant cela, l'équation dont il s'agit se réduira à

$$(2) \quad \int_x^{\beta} e^{xz} \left(-\frac{d(Vz^2)}{dz} + m \frac{dV}{dz} + mV \right) dz = 0.$$

L'expression entre parenthèses égale à 0 donne une équation différentielle en V , qui s'intègre aussitôt; on en tire

$$(3) \quad V = \frac{c}{z^2 - m} \left(\frac{z - \sqrt{m}}{z + \sqrt{m}} \right)^{\frac{\sqrt{m}}{2}},$$

et par le fait, en n'adoptant pour limite supérieure que $+\sqrt{m}$,

$$(4) \quad \Psi = c \int_{-\infty}^{+\sqrt{m}} \frac{e^{xz}}{z^2 - m} \left(\frac{z - \sqrt{m}}{z + \sqrt{m}} \right)^{\frac{\sqrt{m}}{2}} dz.$$

Ψ , ainsi déterminé, serait une solution particulière de notre équation. On ne peut pas prendre $-\sqrt{m}$ pour limite supérieure de l'intégrale, car cette intégrale serait alors infinie, l'ordre d'infinitude de la fonction sous le signe $\int$ étant supérieur à 1. Si l'on intègre de $-\infty$ à $+\sqrt{m}$, la fonction sous le signe $\int$ passe par l'infini pour $z = -\sqrt{m}$ et rend l'intégrale illusoire. De plus, les éléments de cette intégrale sont imaginaires quand z est compris entre $-\sqrt{m}$ et $+\sqrt{m}$, du moins en général.

On pourrait intégrer, en considérant z comme variable complexe, le long d'un chemin qui éviterait le point $-\sqrt{m}$. D'ailleurs l'intégrale, en admettant que la fonction V fût holomorphe, ce qui n'a pas lieu, dépendrait du chemin suivi. Calculer Ψ serait un problème fort difficile, et je ne crois pas que l'on puisse en tirer quelque chose au point de vue qui nous occupe.

à un grand nombre de termes. On développe directement la solution de l'équation

$$\varepsilon \Psi'' + m(1 - \varepsilon) \Psi = 0.$$

Alors, en revanche, Ψ est plus difficile à former, car ses coefficients se déduisent les uns des autres par une formule de récurrence où figurent à la fois trois coefficients. Il est impossible, dans ce cas, d'écrire le terme général de la série, on doit s'en tenir aux premiers termes.

§ 6. *Note supplémentaire.* — Bien que cela ne se rattache pas directement à mon sujet, je ferai remarquer, en finissant, que la simplification qu'apporte la première méthode pour l'intégration de (29) peut se répéter sur des équations plus compliquées.

On peut toujours, quand on a affaire à une équation linéaire d'ordre n dont les coefficients sont des polynômes de degré p : 1° abaisser d'un degré le coefficient de la fonction même y ou du dernier terme; 2° profiter de cet abaissement pour simplifier la formule de récurrence qu'on doit employer afin de développer une intégrale de l'équation. La simplification consiste à réduire d'un le nombre des coefficients figurant dans cette formule de récurrence.

Soit

$$(37) \quad P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

une équation où $P_0, P_1, \dots, P_n$ sont des polynômes de degré n .

1° Posons, comme nous l'avons fait plus haut, $y = e^{\alpha x} z$ dans cette équation, et cherchons à déterminer α de façon à annuler le coefficient de $x^p z$ dans l'équation qui en résultera quand $e^{\alpha x}$, facteur commun, aura disparu. Les dérivées successives de y doivent être remplacées, dans (37), par les valeurs

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \alpha e^{\alpha x} z + e^{\alpha x} \frac{dz}{dx}, \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{d^n y}{dx^n} &= \alpha^n e^{\alpha x} z + n \alpha^{n-1} e^{\alpha x} \frac{dz}{dx} + \dots + e^{\alpha x} \frac{d^n z}{dx^n}. \end{aligned}$$

On peut facilement se figurer l'équation formée; il reste à égaler à 0 le coefficient du terme en $x^p z$. Pour cela, appelons $a_0^p, a_1^p, \dots, a_n^p$ les coefficients de x^p dans $P_0, P_1, \dots, P_n$, nous aurons

$$(38) \quad a_n^p + \alpha a_{n-1}^p + \dots + \alpha^n a_0^p = 0.$$

On peut prendre pour α l'une des n racines de cette équation et le but cherché sera atteint.

2° Si nous voulions intégrer en série l'équation (37) non modifiée, nous remplacerions dans son premier membre $y, \frac{dy}{dx}, \dots$ par des séries dérivées l'une de l'autre comme nous l'avons déjà fait, et nous égalions à 0 les coefficients de toutes les puissances de x dans la série totale S ainsi formée. Supposons y de la forme

$$(39) \quad y = A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k + \dots,$$

et prenons, par exemple, dans la série S , le coefficient de x^k ($k > p$).

Égalons à 0 ce coefficient de x^k et nous aurons une équation contenant des termes en $A_{k-p}, A_{k-p+1}, \dots, A_k$ provenant du terme en y dans (37), en $A_{k-p+1}, A_{k-p+2}, \dots, A_{k+1}$ provenant de celui en $\frac{dy}{dx}$, enfin des termes en $A_{k-p+n}, \dots, A_{k+n}$ provenant de celui en $\frac{d^n y}{dx^n}$. Or, la suppression du terme de degré le plus élevé dans P_n supprime A_{k-p} dans la formule de récurrence. Si, dans cette formule, figuraient seulement quatre coefficients successifs, on pourrait ainsi réduire leur nombre à trois, et les chances de simplification qui laisseraient apercevoir le moyen de former la série entière pourraient se présenter plus facilement.



CHAPITRE III.

DÉTERMINATION COMPLÈTE DE LA PERTE DE CHARGE CORRÉLATIVE A L'ÉTABLISSEMENT
DU RÉGIME UNIFORME.

§ 7. Idée de la méthode ⁽¹⁾. — Nous nous proposerons, dans ce Chapitre, d'exprimer la fonction ϖ , que nous avons définie par la formule (6),

$$\varpi = \frac{u}{U} - \varphi, \quad \text{d'où} \quad \frac{u}{U} = \varphi + \varpi;$$

ϖ désigne la correction que doit subir φ , rapport $\frac{u}{U}$ de la vitesse en un point d'une section à la vitesse de débit, quand on passe du régime uniforme au régime varié.

Nous suivrons la méthode proposée par M. Boussinesq, méthode dont le principe a été indiqué plus haut ⁽¹⁾. Nous en déduirons ensuite, nous reportant à la formule (11), le terme (complément de $\frac{U^2}{g}$) à introduire dans les équations (12) ou (15), pour les rendre exactes. En posant

$$z \frac{d\varpi}{dz} = C e^{-\frac{2.5 m v}{\rho U^3}} \Psi(z),$$

on avait à intégrer l'équation différentielle

$$z \Psi'' + m(1-z) \Psi' = 0,$$

en s'imposant les conditions $\Psi(0) = 0$ et $\Psi'(0) = 1$.

Notre équation s'intègre en posant

$$(40) \quad \Psi(z) = z - A z^2 + B z^3 - C z^4 + D z^5 \dots,$$

car $\Psi(z)$ en est une intégrale particulière, quand chaque coefficient A, B, ..., E est relié aux deux qui le précèdent et, par le fait, aux

⁽¹⁾ Page 23. — Cette méthode est exposée dans un Mémoire de M. Boussinesq (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 6 et 13 juillet 1891, t. CXIII, p. 9 et 49).

deux premiers 0, 1, par les formules

$$\begin{aligned}
 (41) \quad & A = \frac{m}{2}, \\
 & B = \frac{m}{2.3} (A + 1) = \frac{m}{6} \left(1 + \frac{m}{2} \right), \\
 & C = \frac{m}{3.4} (B + A) = \frac{m^2}{18} \left(1 + \frac{m}{8} \right), \\
 & D = \frac{m}{4.5} (C + B) = \frac{m^2}{120} \left(1 + \frac{5}{6} m + \frac{m^2}{24} \right), \\
 & E = \frac{m}{5.6} (D + C) = \frac{23 m^3}{360.30} \left(1 + \frac{5}{23} m + \frac{m^2}{184} \right), \\
 & F = \frac{m}{6.7} (E + D) = \frac{m^3}{360.14} \left(1 + \frac{49}{45} m + \frac{7}{72} m^2 + \frac{m^3}{720} \right), \\
 & G = \frac{m}{7.8} (F + E) = \frac{11 m^4}{49.15.360} \left(1 + \frac{7}{24} m + \frac{7}{528} m^2 + \frac{m^3}{8448} \right), \\
 & H = \frac{m}{8.9} (G + F) = \frac{m^4}{14.72.360} \left(1 + \frac{409}{315} m + \frac{19}{120} m^2 + \frac{m^3}{240} + \frac{m^4}{40320} \right), \\
 & I = \frac{m}{9.10} (H + G) = \frac{563 m^5}{21.35.48.90.360} \left(1 + \frac{1795}{5067} m + \frac{301}{13512} m^2 + \frac{5}{13512} m^3 + \frac{m^4}{648576} \right), \\
 & J = \frac{m}{10.11} (I + H) = \frac{m^5}{14.72.110.360} \left(1 + \frac{517}{350} m + \frac{5027}{22680} m^2 + \frac{11}{1350} m^3 + \frac{11 m^4}{120960} + \frac{m^5}{3628800} \right), \\
 & K = \frac{m}{11.12} (J + I) = \frac{m^6}{11.12} (0,0000005175841 + 0,0000002114865 m + \dots), \\
 & L = \frac{m}{12.13} (K + J) = \frac{m^6}{12.13} (0,0000000250521 + 0,000000346302 m + \dots), \\
 & M = \frac{m}{13.14} (L + K) = 0,0000000000224268 m^7 + \dots, \\
 & N = \frac{m}{14.15} (M + L) = 0,00000000000076471 m^7 + \dots
 \end{aligned}$$

Partant de là, la seconde équation aux limites relatives à ϵ , à laquelle doit satisfaire $\Psi(\epsilon)$, se forme naturellement. C'est

$$(42) \quad 0 = 2 \int_0^1 \Psi(\epsilon) d\epsilon = 1 - \frac{2A}{3} + \frac{B}{2} - \frac{2C}{5} + \frac{D}{3} \dots,$$

équation qui détermine m . Elle est dite caractéristique dans les problèmes correspondants sur la propagation de la chaleur. Comme la

condition $\Psi(0) = 0$, elle dérive immédiatement des conditions aux limites que doit remplir $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$.

En y remplaçant A, B, C par leurs expressions obtenues plus haut, on obtient

$$(43) \quad \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{m}{4} + \frac{m^2}{45} - \frac{103m^3}{360.280} + \frac{1097m^4}{360^2.49.6} - \frac{3449m^5}{360^2.990.49} \\ &+ 0,0000000075447m^6 - 0,00000000007843m^7 + \dots = 0. \end{aligned} \right.$$

Ces derniers coefficients numériques, ici comme plus haut, ne pouvaient être laissés sous forme de fractions ordinaires, à cause de leur complication. Ils ont été calculés soigneusement par logarithmes.

Les secondes équations aux limites auxquelles doit satisfaire $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$ sont relatives à $x = 0$ et à $x = \infty$. Cela revient au même d'y faire satisfaire ϖ , lequel s'obtient en intégrant en ε l'expression de $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$ divisée par ε , depuis la limite $\varepsilon = 1$, où ϖ est nul, jusqu'à $\varepsilon = \varepsilon$ quelconque.

De là, il résulte que ϖ aura une forme analogue à $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$; pour passer de l'un à l'autre, on remplacera tous les $\Psi(\varepsilon)$ par des expressions $-\psi(\varepsilon)$, telles que

$$(44) \quad \psi(\varepsilon) = \int_1^\varepsilon \Psi(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = \left(1 - \frac{A}{2} + \frac{B}{3} - \frac{C}{4} + \dots\right) - \varepsilon + \frac{A}{2}\varepsilon^2 - \frac{B}{3}\varepsilon^3 + \dots$$

et si la définition de $\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right)$ était

$$\left(\varepsilon \frac{d\varpi}{d\varepsilon}\right) = \Sigma ce^{-\frac{2\varepsilon m x}{4\pi R^2}} \Psi(\varepsilon),$$

celle de ϖ sera

$$\varpi = -\Sigma ce^{-\frac{2\varepsilon m x}{4\pi R^2}} \psi(\varepsilon).$$

Partant de là, remarquons :

- 1° Que la condition $\varpi = 0$ pour $x = \infty$ est satisfaite d'elle-même;
- 2° Que, pour l'autre limite $x = 0$, M. Boussinesq emploie la méthode suivante, indiquée par Gauss, comme généralisation de celle de Fou-

rier. On satisfait le plus approximativement possible à la condition qui y est relative en développant ϖ_0 en fonction des ψ multipliés par des coefficients constants, de telle manière que la somme des carrés des différences entre les valeurs du développement et les vraies valeurs de ϖ_0 en chaque point soit minima.

La somme des carrés de ces différences prises pour toutes les valeurs de x de 0 à 1 est représentée par l'intégrale

$$\int_0^1 (c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \dots + c_n\psi_n + \varpi_0)^2 dx,$$

qui sera minima quand ses dérivées premières par rapport aux constantes $c_1, c_2, \dots, c_n$ seront égales à 0.

De là, le système d'équations du premier degré, pour déterminer $c_1, c_2, \dots,$

$$(45) \quad \begin{cases} c_1 \int_0^1 \psi_1^2 dx + c_2 \int_0^1 \psi_1 \psi_2 dx + \dots = - \int_0^1 \psi_1 \varpi_0 dx, \\ c_1 \int_0^1 \psi_1 \psi_2 dx + c_2 \int_0^1 \psi_2^2 dx + \dots = - \int_0^1 \psi_2 \varpi_0 dx, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

La méthode, toute naturelle, est à coup sûr très ingénieuse. Gauss avait remarqué qu'en effectuant les développements de Fourier, dans la Théorie analytique de la chaleur, on était amené à écrire des équations identiques. Seulement, les intégrales de la forme $\int \psi_i \psi_h dx$ y étaient nulles; seules subsistaient les $\int \psi_i^2 dx$ et les seconds membres. Les équations qui déterminent les $c_1, c_2, \dots$ étaient alors de la forme $A c_i = B$ et ces coefficients se calculaient aisément. Ici, au contraire, on ne peut séparer leurs calculs et la difficulté en est bien plus grande.

Résolution de l'équation en m. — Nous allons résoudre cette équation par tâtonnement; nous aurons d'ailleurs à notre disposition, lorsque nous aurons déterminé à fort peu près ses racines, de très bons moyens de vérification indiqués par M. Boussinesq. Appelons donc $f(m)$ le premier membre de l'équation (43). Ce premier membre est positif de

$m = 0$ à $m = 8$; pour $m = 8$, il est

$$f(8) = 1 - 2 + 1,422222 - 0,523174 + 0,117925 \\ - 0,0179765 + 0,0019783 - 0,000164479 + \dots = 0,000810 + \dots$$

Cette valeur, si l'on ajoutait d'autres termes, ne devrait évidemment pas être changée de plus de 0,00001 à 0,00002. Cela résulte de la loi de décroissance facilement observable sur les derniers termes de la somme.

On a pareillement, avec la même approximation,

$$f(8,1) = 1 - 2,025 + 1,458 - 0,54202 + 0,123935 \\ - 0,0191285 + 0,002131 - 0,0001794 + \dots = -0,003172 + \dots;$$

ce qui fait induire que la racine est à très peu de chose près 8,02. La substitution de 8,02 donne, en effet,

$$f(8,02) = 1 - 2,005 + 1,429342 - 0,527108 + 0,119111 \\ - 0,018202 + 0,002008 - 0,000167 + \dots = -0,000016 + \dots;$$

La fonction $f(m)$ devient ensuite négative, mais ses variations avec m sont de plus en plus lentes. Tandis qu'elle vaut 1 pour $m = 0$, son premier minimum, qui a lieu pour $m = 15$ environ, est $< 0,1$ (en valeur absolue). On a, en effet,

$$f(15) = \text{environ } -0,0852.$$

Si l'on continue à faire croître m , f redevient positif pour $m = 24$. On a, en effet,

$$f(24) = 1 - 6 + 12,8 - 14,125710 + 9,55210 - 4,368304 \\ + 1,441826 - 0,359716 + \dots = -0,059804 + \dots;$$

la somme des termes calculés est loin d'être nulle, elle est négative. Mais l'importance du dernier terme montre qu'il y aura lieu de la modifier beaucoup si l'on ajoute les termes qui sont en $m^8, m^9, \dots$, dans l'équation (43). Il serait fort pénible de calculer ces termes comme nous avons calculé les autres; mais on peut les obtenir très simplement avec quelque approximation par extrapolation.

La méthode consiste à calculer les termes inconnus par analogie avec les termes connus; peut-être l'exactitude des résultats paraîtra-t-elle discutable. Mais l'on peut contrôler, nous le verrons, qu'ils sont rigoureusement exacts, du moins dans les limites prévues.

Les termes de la somme $f(24)$, à partir du quatrième, divisés par ceux qui les suivent, donnent les quotients

$$1,478, \quad 2,186, \quad 3,029, \quad 4,008.$$

Le quotient d'un terme par le suivant est, en quelque sorte, une fonction du numéro d'ordre du terme. Or la différence seconde de cette fonction est très sensiblement constante, ou égale à 0,135 et 0,136. Cette constance permet de former le quotient du dernier terme exprimé par le suivant : sa connaissance même fournira le terme suivant, dont le quotient par celui qui le suit est aisément déterminable ; et ainsi de suite. Les deux premiers quotients ainsi déterminés sont

$$5,124, \quad 6,378.$$

On obtient par ce moyen, pour ajouter à la somme déjà trouvée, les termes, dont quatre chiffres significatifs au moins sont bons,

$$+ 0,070202, \quad - 0,011007.$$

Donc, en tout,

$$\left\{ \begin{array}{l} f(24) = -0,059804 + 0,070202 - 0,011007 + \dots \\ \quad = -0,000609 + \text{termes suivants de l'ordre des} \\ \quad \text{millièmes et des dix-millièmes} = + 0,0008 \text{ environ.} \end{array} \right.$$

On voit que $f(24)$ est > 0 ; donc la seconde racine m_2 est < 24 .

Je répète la même opération pour trouver $f(23)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Première expression de } f(23) \\ = 1 - 5,75 + 11,755555 - 12,43255 + 8,056851 \\ \quad - 3,530985 + 1,116897 - 0,2670405 + \dots = -0,051272 + \dots \end{array} \right.$$

quotients déduits de là par division,

$$1,5429, \quad 2,2817, \quad 3,1611, \quad 4,184;$$

différences secondes

$$0,142, \quad 0,143;$$

quotients déduits des premiers

$$5,351, \quad 6,663;$$

d'où enfin

$$f(23) = -0,051272 + 0,049904 - 0,007489 = -0,008857.$$

La racine semble être beaucoup plus rapprochée de 24 que de 23 ;

$f(23)$ est certainement négatif, car il n'y a pas lieu de lui ajouter plus d'un millièème en sus du complément indiqué.

Si l'on forme $f(23, 9)$, on trouve

$$\begin{aligned} f(23, 9) = & 1 - 5,975 + 12,69355 - 13,94988 + 9,393900 \\ & - 1,278055 + 1,406142 - 0,349355 = -0,058698; \end{aligned}$$

quotients déduits par division de tous les termes calculés par leur suivant (à partir du second) :

$$0,4707, \quad 0,9099, \quad 1,4850, \quad 2,1958, \quad 3,0424, \quad 4,025;$$

différences secondes

$$0,1359, \quad 0,1357, \quad 0,1358, \quad 0,1360.$$

Ici, nous pouvons déduire avec une très grande précision les termes en m^8, m^9, m^{10} de l'expression $f(23, 9)$.

Les quotients déduits des premiers sont

$$5,1438, \quad 6,3990,$$

et le complément de $f(23, 9)$ égale

$$0,067918 - 0,010614 + \text{environ } 0,00125.$$

D'où

$$\begin{aligned} f(23, 9) = & -0,058693 + 0,067918 - 0,010614 + \text{environ } 0,00125 \\ = & \text{de } -0,0001 \text{ à } -0,0002. \end{aligned}$$

On voit que 23, 9 peut être pris de confiance comme seconde racine. La série $f(m)$, au delà de 25, ne reste plus assez convergente, dans sa partie calculée ici, pour permettre d'obtenir d'autres racines. Nous déterminerons donc ϖ à l'aide des deux solutions simples définies par ces deux racines m_1 et m_2 , et nous discuterons ensuite le résultat obtenu.

Vérification directe des deux racines m_1 et m_2 . — M. Boussinesq, dans la détermination qu'il a faite de ϖ à l'aide d'une seule racine de l'équation caractéristique, a indiqué dans une Note de son Mémoire une méthode permettant de vérifier directement l'exactitude des racines et, par conséquent, celle des deux résultats $m_1 = 8,02$ et $m_2 = 23,9$ que nous venons de trouver.

La marche à suivre consiste à calculer de proche en proche les coefficients A, B, ... pour les valeurs déterminées de m , $m_1 = 8,02$ ou

$m_2 = 23,9$. Connaissant A et B, on peut les substituer dans la formule qui donne C, puis substituer B et C dans la formule de D, et ainsi de suite. Pour chacune des racines, A, B, C, ... devront rendre nul le premier membre de l'équation

$$(46) \quad 1 - \frac{2A}{3} + \frac{B}{2} - \frac{2C}{5} + \dots = 0,$$

qui est la même que (43).

Donnons les valeurs numériques de nos coefficients quand m y égale

$m_1 = 8,02.$	$m_2 = 23,9.$
A = 4,01	A = 11,95
B = 6,69670	B = 51,58416
C = 7,155642	C = 126,53889
D = 5,534781	D = 212,85700
E = 3,397922	E = 270,38531
F = 1,709564	F = 274,98791
G = 0,73148	G = 232,7574
H = 0,27191	H = 168,5432
I = 0,08941	I = 106,5675
J = 0,02634	J = 59,7740
K = 0,00703	K = 30,1178
L = 0,00172	L = 13,7718
M = 0,00039	M = 5,7635
N =	N = 2,2233
	O = 0,7953
	P = 0,2652
	Q = 0,0828
	R = 0,0243
	S = 0,0067
	T = 0,0018
	U =

Le premier membre de l'équation (46) est exactement $f(m)$; il prend les valeurs $-0,00001$, quand $m = 8,02$; $-0,00005$, quand $m = 23,9$.

Or, nous avons trouvé plus haut

$$f(8,02) = -0,000016,$$

$$f(23,9) = -0,0001 \text{ à } -0,0002.$$

Cette vérification prouve qu'on peut assez se fier *ici* aux procédés d'extrapolation. Il est nécessaire, néanmoins, de calculer directement aussi $f(8,01)$ et $f(24)$.

Voici les résultats qu'on obtient ainsi ⁽¹⁾ :

$$\begin{aligned} f(8,01) &= + 0,00045, \\ f(24) &= + 0,0011. \end{aligned}$$

Par extrapolation on obtenait

$$\begin{aligned} f(8) &= + 0,00081, \\ f(24) &= + 0,0008 \text{ environ.} \end{aligned}$$

Or, on peut admettre que, aux environs des racines, dans un intervalle de 0,01, $f(m)$ varie proportionnellement à m . J'en conclus d'abord que la valeur 8,02 convient beaucoup mieux pour m que 8,01; puis, remarquant que $f(8)$, trouvé par extrapolation, est positif et à peu près exactement le double de la valeur que nous venons d'obtenir pour $f(8,01)$; je peux en déduire aussi une nouvelle confirmation de l'exactitude du procédé par extrapolation. La même preuve surabondante existe pour m_2 dans l'égalité très suffisante des deux valeurs, trouvées par extrapolation et directement, de $f(24)$.

(1) J'ai cru bien faire, pour ne pas charger le texte, de ne pas y mettre les valeurs que prennent A, B, C, ... pour $m = 8,01$ et pour $m = 24$. On peut lire ces valeurs ci-dessous :

$m = 8,01.$	$m = 24.$
A = 4,005	A = 12
B = 6,681675	B = 52
C = 7,133355	C = 128
D = 5,532916	D = 216
E = 3,38188	E = 275,20
F = 1,70018	F = 280,68571
G = 0,72692	G = 238,2366
H = 0,27001	H = 172,9740
I = 0,08872	I = 109,6562
J = 0,02612	J = 61,6648
K = 0,00697	K = 31,1492
L = 0,00170	L = 14,2791
.....	M = 5,9906
	N = 2,3164
	O = 0,8307
	P = 0,2776
	Q = 0,0869
	R = 0,0256
	S = 0,0070
	

§ 8. Formation de ψ_1 et ψ_2 et détermination des constantes c_1 et c_2 .

Connaissant les coefficients A, B, ..., formons à l'aide de la formule (44) les fonctions $\psi_1(\varepsilon)$ et $\psi_2(\varepsilon)$, c'est-à-dire les $\psi(\varepsilon)$ correspondant à chacune de nos racines :

$$(47) \left\{ \begin{array}{l} \psi_1(\varepsilon) = 0,1590\varepsilon + 2,005\varepsilon^2 - 2,2322\varepsilon^3 + 1,7889\varepsilon^4 - 1,1109\varepsilon^5 + 0,5663\varepsilon^6 \\ \quad - 0,2441\varepsilon^7 + 0,0914\varepsilon^8 - 0,0302\varepsilon^9 + 0,0089\varepsilon^{10} - 0,0024\varepsilon^{11} \\ \quad + 0,0005\varepsilon^{12} - 0,0001\varepsilon^{13} + \dots, \\ \psi_2(\varepsilon) = 0,0342\varepsilon + 5,975\varepsilon^2 - 17,1947\varepsilon^3 + 31,6347\varepsilon^4 - 42,5714\varepsilon^5 \\ \quad + 45,0642\varepsilon^6 - 39,2840\varepsilon^7 + 29,0946\varepsilon^8 - 18,7270\varepsilon^9 + 10,6568\varepsilon^{10} \\ \quad - 5,4340\varepsilon^{11} + 2,5098\varepsilon^{12} - 1,0594\varepsilon^{13} + 0,4117\varepsilon^{14} - 0,1482\varepsilon^{15} \\ \quad - 0,0497\varepsilon^{16} - 0,0156\varepsilon^{17} - 0,0045\varepsilon^{18} - 0,0012\varepsilon^{19} - 0,0003\varepsilon^{20} \\ \quad - 0,0001\varepsilon^{21} + \dots \end{array} \right.$$

Ces fonctions vont servir à écrire numériquement les équations (45) et, par le fait, à trouver c_1 et c_2 ; mais il faut pour cela calculer un certain nombre d'intégrales définies. Il n'est possible de les calculer que par un procédé d'approximation. J'ai employé celui de Thomas Simpson.

Pour l'appliquer, on doit chercher d'abord les valeurs que prennent ψ_1 et ψ_2 quand l'on y fait successivement ε égal à 0,1, 0,2, 0,3, ..., 1, en déduire ensuite, pour chaque substitution numérique de ε , les carrés ψ_1^2 et ψ_2^2 , puis les produits $\psi_1\psi_2$, $\varepsilon\psi_1$, $\varepsilon\psi_2$. Le Tableau suivant indique, dans chacune de ses colonnes, les valeurs de ces diverses fonctions, carrés et produits :

ε	ψ_1	ψ_2	ψ_1^2	ψ_2^2	$\psi_1\psi_2$	$\varepsilon\psi_1$	$\varepsilon\psi_2$
0	0,1590	0,0342	0,025280	0,001170	0,005438	0	0
0,1	0,0770	-0,0205	0,005928	0,000420	-0,001578	0,0077	-0,00205
0,2	0,0239	-0,0249	0,000571	0,000621	-0,000595	0,0048	-0,00498
0,3	-0,0086	-0,0138	0,000074	0,000190	0,000119	-0,0025	-0,00414
0,4	-0,0267	-0,0010	0,000713	0,000001	0,000027	-0,0107	-0,00040
0,5	-0,0344	0,0079	0,001185	0,000061	-0,000268	-0,0173	+0,00390
0,6	-0,0350	0,0126	0,001225	0,000159	-0,000441	-0,0210	0,00756
0,7	-0,0306	0,0130	0,000936	0,000169	-0,000398	-0,0214	0,00910
0,8	-0,0226	0,0111	0,000511	0,000123	-0,000251	-0,0181	0,00888
0,9	-0,0122	0,0062	0,000148	0,000038	-0,000076	-0,0110	0,00558
1	0	0	0	0	0	0	0

A l'aide de ce Tableau, rien n'est plus aisé que de former les intégrales qui sont les coefficients des équations (45). On en tire, en

effet,

$$(48) \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \psi_1 \varpi_0 dx = 2 \int_0^1 x \psi_1 dx = -0,01789, \quad \text{car} \quad \varpi_0 = 2x-1 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \psi_1 dx = 0; \\ \int_0^1 \psi_2 \varpi_0 dx = 2 \int_0^1 x \psi_2 dx = 0,004778, \quad \text{car} \quad \int_0^1 \psi_2 dx = 0; \\ \int_0^1 \psi_1^2 dx = 0,002147, \quad \int_0^1 \psi_2^2 dx = 0,0002163, \quad \int_0^1 \psi_1 \psi_2 dx = -0,0001968. \end{array} \right.$$

Les deux premières de ces intégrales peuvent être calculées directement. Il suffit pour cela d'intégrer, entre les limites 0 et 1, les produits par x des séries ψ_1 et ψ_2 . On trouve ainsi

$$2 \int_0^1 \psi_1 x dx = -0,01790 \quad \text{et} \quad 2 \int_0^1 \psi_2 x dx = 0,00477,$$

nombre fort voisins des précédents.

Évaluation plus approchée de l'intégrale $\int_0^1 \psi_2^2 dx$. — La méthode de Simpson, telle que je l'ai appliquée à la recherche numérique de cette intégrale, revient à la partager en cinq parties, savoir : pour x compris de 0 à 0,2, de 0,2 à 0,4, Quand j'ai fait le calcul, il m'a paru que la première de ces parties, la plus importante puisqu'elle correspond aux plus grandes valeurs de ψ_2^2 , devait être évaluée avec une forte erreur relative.

En somme, j'obtenais l'intégrale en question en intégrant entre 0 et 0,2 une fonction approximative de ψ_2 , l'ordonnée d'une parabole du second degré définie par trois points d'abscisses 0, 0,1 et 0,2. Or, x variant de 0 à 0,1, ψ_2 passe du positif au négatif, ψ_2^2 reste positif dans cet intervalle, mais doit être un moment égal à 0 pour reprendre enfin une valeur relativement grande. On conçoit, d'après cela, que la fonction qui remplaçait ψ_2^2 était trop peu déterminée pour que son intégrale fût très proche de celle de cette dernière fonction.

On remédie à cet inconvénient, tout en employant le même procédé de quadrature, en réduisant de moitié les intervalles entre 0 et 0,2. Il faut alors calculer ψ_2^2 pour $x = 0,05$, c'est 0,000008; et pour

$\varepsilon = 0,15$, c'est 0,009681. On obtient ainsi finalement (1)

$$\int_0^{0,2} \psi_2^2 dx = 0,0008978,$$

le procédé appliqué une seule fois donnait

$$\int_0^{0,2} \psi_2^2 dx = 0,0001157.$$

Il en résulte, pour l'intégrale totale $\int_0^1 \psi_2^2 dx$, la valeur

$$(48 \text{ bis}) \quad \int_0^1 \psi_2^2 dx = 0,0001904.$$

L'allure de la fonction ψ_2^2 , quand x varie de 0,2 à 1, est très régulière; donc les portions correspondantes de l'intégrale (48 bis) ont dû

(1) On pourrait aussi évaluer l'intégrale $\int_0^{0,2} \psi_2^2 dx$ en substituant à la fonction ψ_2^2 une autre Φ (fonction algébrique du cinquième degré), qui prendrait les mêmes valeurs pour les points d'abscisses 0, 0,05, 0,1, 0,15, 0,2. C'est la méthode de quadrature de Cotes.

On sait qu'en appelant $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ les abscisses précédentes, $\psi_2^2(\alpha), \psi_2^2(\beta), \dots$ les valeurs de ψ_2^2 correspondantes, on exprime Φ par la relation

$$\Phi = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)}{(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)} \psi_2^2(\alpha) + \frac{(x-\alpha)(x-\gamma)(x-\delta)(x-\varepsilon)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)(\beta-\varepsilon)} \psi_2^2(\beta) + \dots$$

Les coefficients de $\psi_2^2(\alpha), \psi_2^2(\beta), \dots$, développés sous forme de polynômes en x et intégrés entre les deux limites extrêmes 0 et 0,2 permettront d'écrire

$$\text{Valeur approximative de } \int_0^{0,2} \psi_2^2 dx = A \psi_2^2(\alpha) + B \psi_2^2(\beta) + \dots,$$

A, B, C, ... étant des coefficients numériques, égaux, dans le cas qui nous occupe, à

0,01555	et	$\psi_2^2(\alpha), \psi_2^2(\beta), \dots$, valant	$\psi_2^2(0) = 0,001170,$
0,07111	»		$\psi_2^2(0,05) = 0,000008,$
0,02666	»		$\psi_2^2(0,1) = 0,000420,$
0,07111	»		$\psi_2^2(0,15) = 0,000681,$
0,01555	»		$\psi_2^2(0,2) = 0,000621.$

Donc

$$\int_0^{0,2} \psi_2^2 dx = 0,0008806,$$

valeur voisine de celle obtenue par une double application du procédé de Simpson, qui est au fond très précis.

D.

être obtenues exactement, et le nombre ci-dessus est certainement beaucoup plus rapproché de sa vraie valeur que celui que nous avons trouvé plus haut.

Comme confirmation de ceci, j'ajouterai qu'il y a une différence assez grande entre $\int_0^1 \psi_2^2 dx$ évaluée par le procédé de Simpson, tel qu'il a été appliqué d'abord, et la même intégrale évaluée par la méthode plus simple des trapèzes. La portion de l'intégrale comprise entre 0,2 et 1, au contraire, calculée par l'un ou l'autre procédé, conserve la même valeur.

Il est fort peu vraisemblable que les autres intégrales déterminées plus haut par approximation aient des erreurs relatives de l'importance de celle que j'ai relevée. Admettons comme justes les nombres trouvés pour leurs valeurs, et les équations qui déterminent c_1 et c_2 s'écriront

$$(49) \quad \begin{cases} 2,147c_1 - 0,1968c_2 - 17,90 = 0, \\ -1,968c_1 + 1,904c_2 + 47,7 = 0, \end{cases}$$

qui, résolues par rapport à c_1 et c_2 , donnent

$$c_1 = 6,66, \quad c_2 = -18,2.$$

L'expression qui en résulte pour ϖ est

$$(50) \quad \varpi = -6,66 e^{-\frac{16,04\varepsilon}{\rho UR^2}x} \psi_1(x) + 18,2 e^{-\frac{47,8\varepsilon}{\rho UR^2}x} \psi_2(x).$$

Il n'y a pas lieu, je pense, de chercher plus de décimales pour c_1 et c_2 .

§ 9. Détermination de la dépense de charge corrélatrice à l'établissement du régime uniforme. — ϖ étant connu, on peut calculer la dépense totale de charge, ou plutôt le terme complémentaire de cette dépense, qui a pour expression

$$\frac{1}{g} \int_0^\infty dx \int_0^1 (-\varpi) u' dx;$$

u' s'exprime en fonction de ϖ par la formule (16). On a, en remplaçant ϖ par sa valeur dans cette formule

$$(51) \quad u' = U^2 \left(6,66 \times \frac{32,08\varepsilon}{\rho UR^2} e^{-\frac{16,04\varepsilon}{\rho UR^2}x} P - 18,2 \times \frac{95,6\varepsilon}{\rho UR^2} e^{-\frac{47,8\varepsilon}{\rho UR^2}x} Q \right),$$

P et Q ayant respectivement les expressions

$$(52) \quad \begin{cases} P = \psi_1(z)(1-z) + \int_0^z \psi_1(z) dz, \\ Q = \psi_2(z)(1-z) + \int_0^z \psi_2(z) dz. \end{cases}$$

P et Q sont exprimables en séries en z qu'on peut calculer pour $z = 0$, $z = 0,1$, $z = 0,2$, ...; les résultats de ces substitutions vont nous être nécessaires. Je ferai remarquer que le calcul à faire ainsi, très pénible, est beaucoup simplifié en se servant des valeurs numériques connues de $\psi_1(z)$ et de $\psi_2(z)$ de dixième en dixième. Il suffit de multiplier ces valeurs successives par $(1-z)$, c'est-à-dire : la première par 1, la seconde par 0,9, ..., puis d'ajouter chaque fois l'intégrale

$$\int_0^z \psi_1(z) dz \quad \text{ou} \quad \int_0^z \psi_2(z) dz.$$

Ces dernières fonctions de z s'expriment en séries simplement, en intégrant en z les séries ψ_1 et ψ_2 . Ces séries sont d'un calcul beaucoup plus simple que P et Q (1).

Pour évaluer le terme complémentaire de la dépense de charge et arriver ainsi au but principal du travail précédent, formons d'abord le produit $(-\varpi)u'$. Puis nous l'intégrerons successivement en x et en z :

$$(53) \quad \left\{ \begin{aligned} (-\varpi)u' &= U^2 \left[\overline{6,66}^2 \times \frac{32,08\varepsilon}{\rho UR^2} e^{-\frac{32,08\varepsilon}{\rho UR^2}x} \psi_1(z)P \right. \\ &\quad - 6,66 \times 18,2 \times \frac{95,6\varepsilon}{\rho UR^2} e^{-\frac{63,84\varepsilon}{\rho UR^2}x} \psi_1(z)Q \\ &\quad - 18,2 \times 6,66 \times \frac{32,08\varepsilon}{\rho UR^2} e^{-\frac{63,84\varepsilon}{\rho UR^2}x} \psi_2(z)P \\ &\quad \left. + \overline{18,2}^2 \times \frac{95,6\varepsilon}{\rho UR^2} e^{-\frac{95,6\varepsilon}{\rho UR^2}x} \psi_2(z)Q \right], \end{aligned} \right.$$

$$(54) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_0^\infty (-\varpi)u' dx &= U^2 \left[\overline{6,66}^2 \psi_1(z)P - 6,66 \times 18,2 \times \frac{95,6}{63,84} \psi_1(z)Q \right. \\ &\quad \left. - 18,2 \times 6,66 \times \frac{32,08}{63,84} \psi_2(z)P + \overline{18,2}^2 \psi_2(z)Q \right]. \end{aligned} \right.$$

(1) J'ai calculé $\int_0^z \psi_1(z) dz$ de dixième en dixième, directement, au moyen de la série qui la représente. Il est beaucoup plus simple de le faire par le procédé de Thomas Simpson.

Pour intégrer en x de 0 à 1, j'intégrerai séparément chaque produit ψP ou ψQ . Voici, pour $x = 0$, $x = 0,1$, $x = 0,2$, ..., les valeurs de P , Q , des ψP et ψQ :

x .	P .	Q .	$\psi_1 P$.	$\psi_1 Q$.	$\psi_2 P$.	$\psi_2 Q$.
0.....	0,1590	0,0342	0,25280	0,005437	0,005437	0,001170
0,1.....	0,0807	-0,0184	0,006221	-0,001417	-0,001656	0,000377
0,2.....	0,0355	-0,0223	0,000848	-0,000533	-0,000884	0,000555
0,3.....	0,0110	-0,0140	-0,000095	0,000120	-0,000152	0,000193
0,4.....	0,0008	-0,0058	-0,000021	0,000154	-0,000001	0,000006
0,5.....	-0,0053	-0,0009	0,000182	0,000031	-0,000041	-0,000007
0,6.....	-0,0056	+0,0013	0,000196	-0,000045	-0,000071	+0,000016
0,7.....	-0,0040	0,0016	0,000123	-0,000049	-0,000052	0,000020
0,8.....	-0,0021	0,0011	0,000047	-0,000022	-0,000023	0,000011
0,9.....	-0,0005	0,0002	0,000006	-0,000002	-0,000003	0,000001
1.....	0	0	0	0	0	0

On pourra appliquer, comme plus haut, le procédé d'approximation de Thomas Simpson, et l'on aura

$$(55) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \psi_1 P \, dx = 0,0017722, \\ \int_0^1 \psi_2 P \, dx = -0,0001378, \\ \int_0^1 \psi_1 Q \, dx = -0,0000241. \end{array} \right.$$

L'intégrale $\int_0^1 \psi_2 Q \, dx$, pour une raison analogue à celle qui empêchait de calculer $\int_0^1 \psi_2^2 \, dx$ par le procédé de Thomas Simpson employé seulement de dixième en dixième, doit être formée par une méthode plus précise. En opérant exactement, pour évaluer $\int_0^1 \psi_2 Q \, dx$, comme nous avons fait pour l'autre, on trouve le nombre

$$(56) \quad \int_0^1 \psi_2 Q \, dx = 0,0001304.$$

La relation (54) fournit immédiatement

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 dx \int_0^\infty (-\pi) u' \, dx = (0,07860 + 0,00439 + 0,00843 + 0,04320) U^2 \\ \quad \quad \quad = 0,13462 U^2. \end{array} \right.$$

Or, la dépense de charge due à l'établissement du régime uniforme, qu'aurait donnée la formule (15), était $\frac{U^2}{g}$. D'ailleurs, cette formule provenait de (12), relation seulement approximative puisqu'on l'avait tirée de (11) en négligeant le terme d'où vient (au facteur $\frac{1}{g}$ près) celui que nous venons de calculer. Ce dernier étant $0,1346U^2$, la charge dépensée que nous cherchons sera en tout $1,1346 \frac{U^2}{g}$.

CHAPITRE IV.

§ 10. Calcul de la charge dépensée si l'on réduit la série ϖ à un seul terme. — Tout le calcul que nous avons fait au Chapitre précédent pour obtenir le complément du terme représentant la perte de charge corrélatrice à l'établissement du régime uniforme, aurait pu se faire plus facilement si l'on n'avait considéré qu'une seule racine de l'équation caractéristique en m (43). C'est ce qu'a fait M. Boussinesq dans son Mémoire de l'Académie des Sciences (1), mais en déterminant moins complètement la seule racine employée. L'expression de ϖ serait alors réduite à un seul terme ou à une seule solution particulière. Les équations (45), qui déterminaient $c_1, c_2, \dots, c_n$, se réduiraient à une :

$$(58) \quad c_1 \int_0^1 \psi_1^2 dx = - \int_0^1 \psi_1 \varpi_0 dx = - 2 \int_0^1 x \psi_1 dx.$$

Cette équation, où les intégrales ont été calculées déjà, donne $c_1 = 8,33$. Il en résulte, pour ϖ , l'expression

$$(59) \quad \varpi = - 8,33 e^{-\frac{16,66}{\rho U R^3} x} \psi_1(x).$$

On forme aisément l'expression $(-\varpi)u'$ qui est, si l'on se rappelle

(1) *Comptes rendus*, 6 et 13 juillet 1891, t. CXIII, p. 9 et 49.

la définition de P,

$$(-\varpi)u' = U^2 \overline{8,33}^2 \times \frac{32,08}{2UR^2} \varepsilon e^{-\frac{32,08}{2UR^2} \varepsilon x} \psi_1(\varepsilon) P;$$

effectuons en x l'intégrale $\int_0^1 d\varepsilon \int_0^\infty (-\varpi) u' dx$, nous aurons

$$(60) \quad U^2 \overline{8,33}^2 \int_0^1 \psi_1(\varepsilon) P d\varepsilon.$$

Cette dernière intégrale a été trouvée (p. 44); sa valeur est

$$0,0017722.$$

Le terme complémentaire cherché égale donc $\frac{U^2}{g} \times 0,123$, et la perte de charge totale provenant de l'établissement du régime uniforme est $1,123 \frac{U^2}{g}$.

Y aurait-il lieu de pousser d'une façon plus complète le calcul de cette charge dépensée. — Admettons comme exacts tous les principes qui ont permis d'arriver à la théorie précédente; admettons aussi, ce qui n'est pas tout à fait vrai, en ce que nous avons négligé les termes non linéaires, que ϖ satisfasse réellement à l'équation aux dérivées partielles (22). Avant d'étudier les expériences de la seconde série du Dr Poiseuille dont j'ai parlé incidemment au Chapitre premier, et d'essayer d'expliquer ses résultats à l'aide des notions théoriques auxquelles nous sommes arrivé, demandons-nous si le terme complémentaire obtenu pour la dépense de charge ne serait pas modifié par suite d'un calcul plus complet.

Appelons, pour fixer les idées, ϖ_0 l'expression de ϖ pour $x = 0$ et ϖ_0^a son expression approchée obtenue par le développement approximatif que nous avons employé, déduit des équations (45). ϖ_0^a est de la forme $-c_1 \psi_1(\varepsilon) + c_2 \psi_2(\varepsilon)$ et ne s'écarte pas très fort de ϖ_0 . Pour en rendre compte, j'ai calculé de dixième en dixième ses valeurs : elles sont pour

$\varepsilon = 0$	: - 0,431	$\varepsilon = 0,5$	: + 0,371
0,1	: - 0,885	0,6	: + 0,462
0,2	: - 0,612	0,7	: + 0,440
0,3	: - 0,194	0,8	: + 0,352
0,4	: + 0,160	0,9	: + 0,194
		1	: 0,000

On peut, en prenant deux axes de coordonnées, celui des τ et celui des ϖ , construire la courbe représentative de ϖ_0^a (*fig. 1*). D'ailleurs, ϖ_0 se représente, d'abord, par la droite AB ($\varpi_0 = 2\tau - 1$), de $\tau = 0$ à τ très voisin de 1, puis, de cette dernière valeur, à $\tau = 1$, par la droite BC presque verticale, car le rapport $\frac{u}{U}$ est tenu de s'annuler pour $\tau = 1$, même dès la première section du tube.

Si nous n'avions pris qu'une seule racine de l'équation caractéristique, ϖ_0^a eût été de la forme $c_1 \psi_1(\tau)$ et sa courbe représentative, que

Fig. 1.

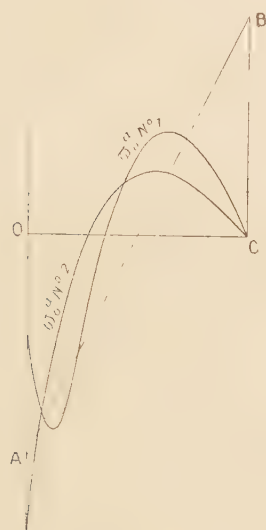
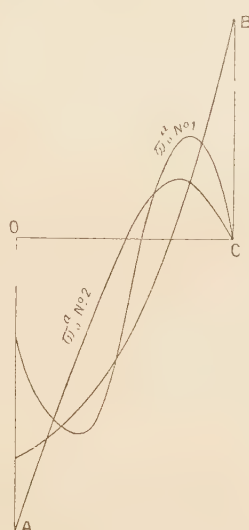


Fig. 2.



j'ai figurée aussi en la désignant par le n° 2, n'est visiblement pas aussi rapprochée de la limite ϖ_0 .

Ces deux courbes de ϖ_0^a ne donnent pas une idée exacte des grandeurs de cette fonction aux différents points du tube, depuis le centre de la section jusqu'à la paroi. Il faudrait, pour représenter ϖ_0^a d'une manière concrète, l'exprimer en fonction de la variable r , distance d'un point de la section au centre. τ est lié à r par l'équation $\tau = \frac{r^2}{R^2}$, où R est le rayon du tube. Supposons ce rayon égal à 1 ou prenons $\frac{r}{R}$ comme variable.

Les lignes, qui représentaient graphiquement les deux expressions approchées de ϖ_0 , et ϖ_0 lui-même, vont être transformées si l'on emploie cette nouvelle variable. Chaque point de ce système de lignes conservera la même ordonnée et aura comme abscisse la racine carrée de son ancienne abscisse (*fig. 2*).

La divergence, grande pourtant, entre les deux expressions de ϖ_0^a , n'a pas beaucoup d'influence sur l'expression de la valeur finale de la perte de charge due à l'établissement du régime uniforme. En effet, quand ϖ a deux termes, le coefficient de $\frac{U^2}{g}$ dans cette expression est 1,1346; quand ϖ n'en a qu'un, ce même coefficient se réduit à 1,123. Il est très vraisemblable *a priori* que, si l'on prenait un troisième terme dans ϖ , ce coefficient resterait dans le voisinage de ces deux valeurs.

En examinant la question d'une manière un peu plus détaillée, on est évidemment conduit aux mêmes conclusions. Il faudrait introduire dans ϖ une fonction $\psi_3(\varkappa)$ et peut-être une quatrième $\psi_4(\varkappa)$, pour pousser plus loin le calcul dont il s'agit. Or, pour nous rendre compte de la nature de ces fonctions, imaginons que l'on construise les courbes de ψ_3 ou ψ_4 prises seules, ces courbes oscilleraient de part et d'autre de l'axe des $\varkappa$ un nombre de fois beaucoup plus grand que ψ_1 et ψ_2 entre 0 et 1, mais ψ_3 et ψ_4 prendraient des valeurs absolues beaucoup moindres.

Si l'on développe ϖ à l'aide de trois fonctions ψ_1 , ψ_2 et ψ_3 , au lieu de deux seulement, il semble très probable : 1° que le coefficient c_2 de ψ_2 variera d'une quantité relativement faible par rapport à sa valeur calculée plus haut; 2° que c_1 , qui a presque la même valeur quand ϖ a deux ou un terme, changera encore beaucoup moins par l'adjonction d'un troisième terme.

D'une part donc, l'adjonction de nouveaux termes à ϖ ferait varier peu les termes fondamentaux et surtout très peu le premier. D'autre part, ces nouveaux termes, étant relatifs à une racine de l'équation caractéristique en m plus grande (et sans doute de beaucoup) que les précédentes, s'annuleraient rapidement quand x grandirait. Ils ne changeraient guère l'intégrale

$$\int_0^1 d\varkappa \int_0^\infty (-\varpi) u' dx$$

et par conséquent notre coefficient. Ce coefficient, dans l'hypothèse que nous avons faite, est donc, suivant toute probabilité, déterminé assez exactement. Il est d'ailleurs impossible de connaître le signe de l'erreur que l'on a commise sur lui.

Enfin, ϖ ne satisfait pas rigoureusement à l'équation aux dérivées partielles qui nous a servi à le déterminer. Cette équation était obtenue par la suppression des termes du second degré, lesquels la modifiaient surtout pour les petites valeurs de l'abscisse x , c'est-à-dire aux points du tube où $\frac{u}{U}$ est voisin de 1. Il est encore impossible de déterminer le signe de l'erreur qu'entraîne cette suppression; mais il est certain que son importance est beaucoup moins grande que la quantité 0,1346 que nous sommes amené à ajouter au coefficient 1 de $\frac{U^2}{\varrho}$.

§ 11. La méthode de calcul du Chapitre précédent permet de trouver à quelle distance de l'entrée du tube le régime uniforme sera établi. — Voici comment on peut s'y prendre pour résoudre ce problème à une première approximation, en suivant la marche indiquée par M. Boussinesq. Remarquons qu'une différence relative de 0,01 sur les vitesses aux différents points de deux sections n'est pas appréciable par l'expérience. Il suffit alors de rendre inférieur à 0,01 le rapport, à la vitesse de régime uniforme en un point de la section, de l'excès de vitesse au même point lorsque ce régime n'est pas établi. Le rapport en question est précisément

$$(61) \quad \frac{\varpi}{2(1-\tau)}.$$

Or, si l'on ne prend qu'une racine de l'équation caractéristique en m , on sait que ϖ a la forme

$$8,33e^{-\frac{16,04}{5} \frac{x}{UR^2}} \psi_1(\tau);$$

le rapport de cette quantité à $2(1-\tau)$ doit être inférieur à 0,01 quel que soit τ . Or, le quotient $\frac{\psi_1(\tau)}{1-\tau}$ est évidemment maximum en valeur absolue au centre des sections. On le voit en divisant les valeurs de $\psi_1(\tau)$ relatives à 0, 0,1, ..., 0,9 par 1, 0,9, 0,8,

Égal à 0,1590 pour $\tau = 0$, il est pour $\tau = 0,9$: — 0,122.

D.

Donc, nous rendrons inférieure à 0,01 l'expression

$$\frac{8,33 e^{-\frac{16,04 \varepsilon}{\rho U R^2} x}}{2} \times 0,1590.$$

Cela fait

$$(62) \quad e^{-\frac{16,04 \varepsilon}{\rho U R^2} x} < \frac{0,02}{1,3245}, \quad \frac{16,04 \varepsilon x}{\rho U R^2} > -\log \frac{0,02}{1,3245}.$$

Le coefficient de frottement ε , frottement par mètre carré à 10°, exprimé avec l'unité de poids qui doit être ici le poids du mètre cube, est, pour l'eau, 0,0000001336, c'est-à-dire 0,00000131 p.

La précédente inégalité s'écrit

$$x > 199590 R^2 U.$$

En supposant le diamètre du tube égal à 0^m,001, si la vitesse moyenne U est de 1^m par seconde, on obtient pour x la longueur minima 0,0499, soit en chiffres ronds 0,05.

Si nous prenions la valeur (50) de ϖ obtenue au Chapitre précédent (p. 42), ϖ se composerait de deux termes; le problème à résoudre semble plus compliqué. En somme, le rapport (61) est une fonction de deux variables x et ε . Il faut déterminer l'une, x , de façon que le maximum de la fonction, quand l'autre varie, soit inférieur à une quantité donnée. Néanmoins, on peut facilement montrer que, des deux parties du rapport provenant des deux termes de ϖ , la seconde sera devenue insignifiante relativement à la première à l'endroit à définir. Servons-nous, pour cela, du résultat déjà acquis. Nous avons trouvé, en supposant le diamètre du tube $2R$ égal à 0^m,001, que la distance à l'origine du point où le régime uniforme est établi est 0^m,05. Partant des mêmes hypothèses, voyons ce qu'est devenu à 0^m,05 de l'origine la valeur (50) de ϖ dont il s'agit.

On a

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \varpi_{x=0,05} = & - \frac{16,04 \times 0,00000131 \times 0,05}{\frac{1}{4000000}} \times \psi_1(\varepsilon), \\ & + 18,2 e^{-\frac{47,8 \times 0,00000131 \times 0,05}{\frac{1}{4000000}}} \times \psi_2(\varepsilon). \end{aligned} \right.$$

Il est facile de passer du logarithme népérien d'un nombre au loga-

rithme ordinaire : on calcule donc aisément ces deux expressions pour $\epsilon = 0$, et l'on a

$$- 0,01582 + 0,00000227.$$

Pour la valeur 0 donnée à ϵ , le rapport (61), divisé en deux parties provenant l'une du terme en ψ_1 , l'autre du terme en ψ_2 , est donc

$$- 0,00791 + 0,00000113 = - 0,00790887,$$

quantité dont la valeur absolue est plus petite que 0,01. D'ailleurs, c'est pour $\epsilon = 0$ que la somme des deux termes de $\frac{\varpi}{2(1-\epsilon)}$ est la plus grande possible en valeur absolue. Dans ce cas, en effet : 1° le premier terme du rapport est maximum ; 2° je vais montrer aisément que, quel que soit ϵ , le second terme est si petit par rapport à l'autre qu'il n'y a pas lieu d'en tenir compte quand on étudie les variations de l'ensemble.

Si l'on fait $\epsilon = 0$, $\frac{\psi_2(\epsilon)}{1-\epsilon} = 0,0342$; si ϵ varie de 0,9 à 1, $\frac{\psi_2(\epsilon)}{1-\epsilon}$, égal d'abord à 0,0620, doit rester à peu près constant. Donc $\frac{\psi_2(\epsilon)}{1-\epsilon}$ prend ses valeurs les plus grandes pour ϵ compris de 0,8 ou 0,9 à 1 ; et ce maximum est égal à environ deux fois la fonction au centre des sections. De là, il découle aussitôt que, pour $x = 0,05$, le second terme de $\frac{\varpi}{2(1-\epsilon)}$, maximum aussi quand ϵ varie de 0,9 à 1, égale alors à peu près deux fois [0,00000113], ou [0,00000226], et n'est guère que $\frac{1}{4000}$ du maximum du premier, par conséquent négligeable.

Il est évident que, dans l'application, il suffit de s'assurer que $\frac{\varpi}{2(1-\epsilon)}$, réduit à son premier terme, est inférieur à 0,01, sans s'inquiéter du second terme. Au point d'un tube où la condition est réalisée, le second terme sera une petite fraction du premier, fraction qui reste la même si l'on change le tube ; car alors, l'abscisse x du point dont il s'agit étant définie par la formule $\frac{x}{R^2 U} = K$, les deux exponentielles qui entrent dans l'expression de ϖ sont constantes.

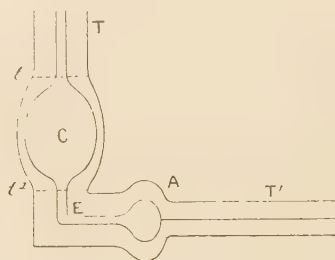


CHAPITRE V.

LES ÉCOULEMENTS DANS LES TUBES FINS ET ASSEZ COURTS, OBSERVÉS PAR POISEUILLE,
OBÉISSENT AUX LOIS QUI DÉCOULENT DES CALCULS PRÉCÉDENTS.

§ 12. Exposition des expériences de Poiseuille. — Le D^r Poiseuille a présenté à l'Académie, en 1842, les résultats d'expériences fort précises sur les écoulements de l'eau dans les tubes fins (¹). Il employait comme réservoir, pour faire ces expériences, une ampoule de verre C, soufflée dans un tube épais courbé en E à angle droit. La contenance de cette ampoule était définie par deux traits t et t' . Au point A du

Fig. 3.



tube T était soudé le tube capillaire T' dans lequel on voulait étudier l'écoulement; ce dernier avait été coupé net, au préalable, à ses deux extrémités.

Poiseuille mesurait ensuite, à chaque bout du tube T', deux diamètres intérieurs dans des directions perpendiculaires : c'était plus rigoureux de supposer ce tube légèrement elliptique que circulaire. Nous avons vu que les lois de l'écoulement dans un tube peu elliptique sont les mêmes que dans un tube circulaire dont le rayon est la demi-

(¹) Voir Mémoire de Poiseuille *Sur les mouvements des liquides* (*Recueil des savants étrangers*, t. IX, p. 433).

somme des axes de l'ellipse de section. D'ailleurs, au degré d'approximation obtenu au Chapitre III, les conclusions, tirées des calculs qui y sont faits, sont nécessairement encore applicables à nos tubes peu elliptiques.

Restait à évaluer la pression qui fait écouler le liquide. Poiseuille notait la pression dans le manomètre : au commencement de l'expérience, c'était la même qu'au niveau supérieur t , puis la pression à la fin, quand l'eau affleurait au trait t' . Il prenait la moyenne de ces deux pressions et admettait que l'eau s'écoulait sous une pression constante égale à cette moyenne.

Pour justifier cette hypothèse, remarquons que la hauteur de l'eau entre les traits t et t' ne représente qu'une pression très faible vis-à-vis même les plus petites données par le manomètre, dans ces diverses expériences ⁽¹⁾.

Dans des tubes de longueur assez grande relativement à leurs diamètres, les lois de l'écoulement étaient très régulières, la vitesse de débit était proportionnelle : 1^o à la charge totale dépensée, 2^o à l'inverse de la longueur L , 3^o au carré du rayon. Ces lois sont exprimées par la formule théorique que j'ai reproduite dans l'Introduction. Poiseuille appelle la catégorie des expériences qui lui ont donné ces résultats, sa *première série*. Ces expériences ont permis de calculer le coefficient de frottement intérieur de l'eau ϵ introduit dans les équations de Navier. C'est 0^{sr}, 1336 par mètre carré, à 10° C. ⁽²⁾.

Expériences de la seconde série. — Les lois précédentes cessaient d'être vérifiées lorsque les tubes étaient réduits à de plus faibles longueurs. Poiseuille a néanmoins fait, sur de tels tubes, un certain nombre d'expériences dont il a scrupuleusement noté les résultats sans les interpréter. Ces expériences constituent sa *seconde série*. Sans doute, les tubes dont il s'agit avaient eu leur entrée un peu évasée par la fusion, et remplissaient assez bien les conditions théoriques

(1) Pour plus de détails, voir Mémoire de Poiseuille (*Savants étrangers*, t. IX).

(2) Le coefficient ϵ dépend de la température. D'après les expériences mêmes de Poiseuille, il est régi par la formule

$$\epsilon_t = \frac{\epsilon_0}{1 + at + bt^2}, \quad \text{où} \quad \begin{cases} a = 0,0336793, \\ b = 0,0002209936. \end{cases}$$

dans lesquelles nous nous sommes placés dans notre étude précédente, car l'écoulement s'y faisait suivant les lois que nous avons déterminées.

Les tubes que Poiseuille appelait A_{III} , A_{IV} , A_V , A_{VI} , A_{VII} , et qui provenaient d'un même tube A successivement raccourci, sont les premiers de la seconde série. Voici, tels qu'ils sont dans son Mémoire, les comptes rendus de Poiseuille relatifs aux expériences faites avec A_{III} , A_{IV} , etc.

TUBE A_{III} .		
Longueur du tube.....	$l = 25^{mm}, 55$	
Diamètres du tube à ses deux extrémités..	$d = \begin{cases} 0,1405 \\ 0,1430 \end{cases}$	
Température du récipient.....	10°	

Numéros des expériences.	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $13^{\circ}, 34085$.
1.....	$387^{mm}, 520$	$14' 14'' = 880''$
2.....	$774^{mm}, 895$	$7' 28'' = 448''$

TUBE A_{IV} .		
Longueur du tube.....	$l = 15,75^{mm}$	
Diamètres du tube à ses deux extrémités..	$d = \begin{cases} 0,1405 \\ 0,1430 \end{cases}$	
Température du récipient.....	10°	

Numéros des expériences.	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $13^{\circ}, 34085$.
1.....	$24,661^{mm}$	$2.24. 6^h = 8646''$
2.....	$49,591$	$1.12.35 = 4355''$
3.....	$98,233$	$0.36.34 = 2194.45'''$
4.....	$148,233$	$0.24.15.30 = 1455.30'''$
5.....	$194,257$	$18.36 = 1116''$
6.....	$388,000$	$9.31 = 571''$
7.....	$755,160$	$4.58 = 298''$

Poiseuille compare ici les temps d'écoulement observés à ceux que donnerait le calcul, si ces expériences suivaient les lois générales.

Temps	
calculés.	observés.
4299''	4355''
2170	2194
1438	1455
1097	1116
549	571
275	298

TUBE A_v.

Longueur du tube..... $l = 9,55^{\text{mm}}$
 Diamètres du tube à ses deux extrémités... $d = \begin{cases} 0,1405 \\ 0,1430 \end{cases}$
 Température du récipient..... 10°

Numéros des expériences.	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $13^{\circ}, 34085$.
	^{mm}	^h
1.....	23,638	1.32.50" = 5570
2.....	49,185	44.59 = 2699
3.....	99,221	22.40 = 1360
4.....	148,623	15.18.30 = 918,5
5.....	193,315	11.58 = 718
6.....	387,737	6.21 = 381
7.....	774,620	3.27 = 207

TUBE A_{vi}.

Longueur du tube..... $l = 6,775^{\text{mm}}$
 Diamètres du tube à ses deux extrémités... $d = \begin{cases} 0,1405 \\ 0,1430 \end{cases}$
 Température du récipient..... 10°

Numéros des expériences.	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $13^{\circ}, 34085$.
	^{mm}	^h
1.....	24,753	1. 3'.48".45" = 3828,75
2.....	50,001	32. 3.45 = 1923,75
3.....	99,343	16.34 = 994
4.....	148,618	11.22 = 682
5.....	193,010	8.57.45 = 537,75
6.....	387,887	4.51.30 = 291,50
7.....	773,790	2.45.45 = 165,75

TUBE A_{vii}.

Longueur du tube..... $l = 1^{\text{mm}}$
 Diamètres du tube à ses deux extrémités... $d = \begin{cases} 0,1405 \\ 0,1430 \end{cases}$
 Température du récipient..... 10°

Numéros des expériences.	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $13^{\circ}, 34085$.
	^{mm}	^h
1.....	4,783	1. 5'.26".45" = 3926,75
2.....	6,204	51.12 = 3072
3.....	12,129	28. 5.30 = 1685,50
4.....	24,003	16.14.15 = 974,25
5.....	49,040	9.31.45 = 571,75
6.....	98,832	5.48.45 = 348,75
7.....	148,475	4.27 = 267
8.....	193,501	3.44 = 224
9.....	387,972	2.24.45 = 144,75
10.....	773,717	1.35 = 95

M. Couette, qui s'est beaucoup occupé du frottement des liquides, mais surtout au point de vue expérimental, a étudié ces Tableaux. Diverses considérations lui avaient fait présumer que, pour représenter la dépense totale de charge produite entre le réservoir et la sortie du tube, il fallait, d'une part, au terme $\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^3}$, ajouter un terme correctif $\frac{U^2}{g}$, et, d'autre part, accroître dans le terme principal même la longueur L d'une quantité à déterminer d'une manière tout à fait empirique, ce qui correspondait à donner au tube un certain allongement fictif.

§ 13. Explication théorique de M. Boussinesq. — M. Boussinesq a essayé de rendre compte théoriquement de la nécessité, pour d'autres raisons, d'un certain allongement fictif, qu'il démontre devoir être proportionnel aux dimensions linéaires de l'embouchure, c'est-à-dire, au diamètre; pour toutes les embouchures de même forme à l'entrée du tube. Voici comment il en analyse la cause ⁽¹⁾.

Dans le calcul d'observations assez précises pour qu'une correction aussi petite que celle que nous avons trouvée au Chap. III pour le terme en $\frac{U^2}{g}$ soit sensible, il faudra généralement tenir aussi quelque compte de la perte de charge produite avant l'entrée, savoir, entre les régions du réservoir d'amont où les vitesses du fluide sont encore négligeables et la première section σ de la partie cylindrique du tube. On doit pouvoir admettre, avec quelque approximation, que les frottements, très faibles (en somme) sur de si petits parcours, n'y modifient guère, sauf près de la paroi, les formes des filets fluides et les rapports mutuels de leurs vitesses, formes et rapports dès lors indépendants de la charge, ou de U , ainsi que des dimensions absolues de l'évasement et de la section σ . Or, dans l'hypothèse que les frottements ne produisent, de la sorte, sur le mode de distribution des vitesses près de l'entrée, que des perturbations trop faibles pour modifier sensiblement l'ensemble des travaux de ces résistances, ceux-ci, proportionnels tout à la fois, par unité de temps et de volume, aux vitesses même (c'est-à-dire à U) et aux composantes totales, suivant les axes,

⁽¹⁾ Cette explication, un peu résumée, est donnée dans une Note finale de son Mémoire de l'Académie des Sciences, 6 et 13 juillet 1891.

des frottements sur l'unité de volume liquide (c'est-à-dire aux produits de ε par certaines dérivées secondes des vitesses relativement aux coordonnées, ou par $\frac{U}{\sigma}$), le seront, en définitive, à $\varepsilon \frac{U^2}{\sigma}$, et enfin, pour tout le volume considéré, à

$$(63bis) \quad \varepsilon \frac{U^2}{\sigma} (\sigma \sqrt{\sigma}) = \varepsilon U^2 \sqrt{\sigma}.$$

Le travail des frottements fournit immédiatement l'expression de la perte de charge correspondante. Appliquons, entre la région du réservoir, voisine de l'entrée du tube, où la pression est p_0 , et la section contractée ou première section du tube σ , le théorème des forces vives, à la masse liquide qui traverse cette section σ pendant l'unité de temps. Soit p_1 la pression sur σ .

La vitesse U est commune à tous les filets et la masse considérée de liquide est $\rho U \sigma$. Sa force vive sera

$$\rho U \sigma \frac{U^2}{2}.$$

A chaque instant, le liquide qui s'écoule supporte en aval la pression p_1 ; en amont, la pression p_0 . Il est donc sollicité par la force $(p_0 - p_1) \sigma$, dont le travail sera, pendant l'unité de temps,

$$(p_0 - p_1) \sigma U.$$

Enfin, le travail des frottements étant de sens contraire, et approximativement (en valeur absolue)

$$K \varepsilon U^2 \sqrt{\sigma},$$

on peut écrire l'équation

$$\rho U \sigma \frac{U^2}{2} = (p_0 - p_1) \sigma U - K \varepsilon U^2 \sqrt{\sigma};$$

d'où

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{p_0 - p_1}{\rho g} - K \frac{\varepsilon U^2 \sqrt{\sigma}}{\rho g U \sigma},$$

et enfin

$$(63ter) \quad \frac{p_1}{\rho g} + \frac{U^2}{2g} = \frac{p_0}{\rho g} - K \frac{\varepsilon U}{\rho g \sqrt{\sigma}}.$$

D.

Le premier membre est la charge totale à l'endroit de la section σ , $\frac{P_0}{\rho g}$ est la charge dans le réservoir; le dernier terme $\frac{K\varepsilon U}{\rho g \sigma} \sqrt{\sigma}$, pris en valeur absolue, représente donc la perte de charge que nous cherchons. C'est la perte qui serait produite en régime uniforme sur une certaine longueur de tube, laquelle est proportionnelle au diamètre. Pour représenter la dépense totale de charge, on peut donc imaginer qu'on donne au tube un petit allongement fictif proportionnel au diamètre. Il est bon de remarquer que le coefficient K sera fonction de la forme de l'évasement et de celle du réservoir à son approche.

Si nous avons affaire à un tube circulaire, en appelant αD le petit allongement fictif du tube, il viendra, d'après ce qui précède, pour l'expression théorique de la charge totale dépensée :

$$(64) \quad \frac{8\varepsilon U}{\rho g R^2} (L + \alpha D) + 1,1346 \frac{U^2}{g};$$

α est naturellement relié au précédent coefficient K par la relation

$$\alpha = \frac{K}{16\sqrt{\pi}}.$$

§ 14. Étude des tubes A. — M. Couette avait entrepris l'étude des résultats consignés sur le Tableau du tube A_{IV}. Il égalait la somme des deux termes $\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2}$ et $\frac{U^2}{g}$ à la dépense de charge observée et laissait indéterminé le coefficient de frottement ε . Il en tirait pour ε des valeurs un peu différentes suivant les expériences, ce qui l'a porté à conclure qu'il avait pu y avoir de petites variations de température pendant qu'on opérait avec le tube A_{IV} ⁽¹⁾.

Les quatre premiers résultats fournis par les expériences sur le tube A_{VI} étaient rigoureusement concordants, mais les autres semblaient donner une valeur plus grande pour le coefficient de frottement. Ces dernières expériences et celles faites avec le tube A_V, si l'on

(¹) Voir p. 74 de sa Thèse, où il explique par des variations de température, allant à $\frac{1}{2}$ degré, les variations irrégulières de ε ; plus loin (p. 75), il explique les variations systématiques de ε par l'allongement fictif du tube, dont il a eu, le premier, l'idée.

essaye de les interpréter sans l'aide de la théorie et sans idées préconçues, mènent nécessairement à un résultat très voisin de celui de notre théorie. C'est ce que je vais essayer d'établir tout d'abord.

Résultats tirés d'expériences indépendamment de la théorie. — Je suppose *a priori* que la dépense totale de charge qui est, en somme, la différence de pression dans le réservoir et à la sortie du tube, exprimée en hauteur d'eau, soit composée de deux termes : l'un proportionnel à U , l'autre à U^2 . Cela semble très rationnel, au point de vue mathématique, d'exprimer sous la forme $KU + K'U^2$ une fonction qui n'est pas tout à fait proportionnelle à U . J'admets, pour préciser, que le terme en U soit de la forme $\frac{8\varepsilon L}{\rho g R^2} x$, x étant une quantité que l'expérience devra déterminer, sans doute, un peu plus grande que la longueur L . Le second terme sera de la forme $\frac{U^2}{g} y$. J'aurais pu, en me donnant deux expériences quelconques des cinq tableaux, où sont connus la perte de charge, la vitesse d'écoulement et le rayon du tube, déterminer x et y par deux équations telles que

$$(65) \quad \frac{8\varepsilon U}{\rho g R^2} x + \frac{U^2}{g} y = \frac{p_0 - p}{\rho g}.$$

J'ai préféré employer, pour déterminer x et y , tout un Tableau d'expériences à la fois. Cela est aisé par la méthode des moindres carrés. Il suffit de rendre minima la somme des carrés des différences entre les premiers membres et les seconds des équations telles que (65) formées pour chaque expérience. Alors, soient $U_1, U_2, \dots$ les vitesses d'écoulement relatives à la première, à la seconde, etc., des expériences, soient p_1^0 et p_1 , p_2^0 et $p_2, \dots$ les pressions dans le réservoir et à la sortie du tube, correspondantes, on sera amené à écrire les équations

$$(65 \text{ bis}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{8\varepsilon U_1}{\rho g R^2} \left(\frac{8\varepsilon U_1}{\rho g R^2} x + \frac{U_1^2}{g} y - \frac{p_1^0 - p_1}{\rho g} \right) + \frac{8\varepsilon U_2}{\rho g R^2} \left(\frac{8\varepsilon U_2}{\rho g R^2} x + \frac{U_2^2}{g} y - \frac{p_2^0 - p_2}{\rho g} \right) + \dots = 0, \\ & \frac{U_1^3}{g} \left(\frac{8\varepsilon U_1}{\rho g R^2} x + \frac{U_1^2}{g} y - \frac{p_1^0 - p_1}{\rho g} \right) + \frac{U_2^3}{g} \left(\frac{8\varepsilon U_2}{\rho g R^2} x + \frac{U_2^2}{g} y - \frac{p_2^0 - p_2}{\rho g} \right) + \dots = 0; \end{aligned} \right.$$

ceci consiste à évaluer à 0 les dérivées en x et y de la somme de carrés

dont il s'agit. Les parenthèses représentent, on le voit, les excès de la dépense de charge, déterminée par l'hypothèse que j'ai faite, sur celle qu'on a mesurée. Ces dépenses de charge sont des pressions plus ou moins fortes exprimées en hauteur de mercure et converties en hauteur d'eau. Il est clair que, par la méthode que nous employons, les erreurs absolues entre les dépenses de charge observées et les premiers membres de (65) seront du même ordre de grandeur pour les faibles dépenses de charge que pour les fortes. On conçoit que, les erreurs d'expérience pouvant être aussi considérables sur les unes que sur les autres, ce mode de procéder ait sa raison d'être.

Pour l'application numérique, j'ai admis comme diamètre le diamètre moyen ⁽¹⁾ du tube $0^{\text{mm}}, 1417$. C'est ce que l'on a fait pour interpréter les expériences de la première série. J'ai exprimé toutes les quantités figurant dans les formules (65 *bis*), dans le système d'unités dérivées du mètre et de la seconde. Le coefficient de frottement ϵ , déjà défini, égale $0,0000001336$; ρg , le poids de l'unité de volume, est pris égal à 1. On peut commencer par chercher U pour chaque expérience en divisant le volume de l'ampoule exprimé en mètres cubes par la section du tube en mètres carrés et le temps de l'écoulement en secondes.

Le second membre de (65), exprimé en mètres au lieu de millimètres, comme il l'est dans les observations, doit encore être multiplié par 13,57, densité du mercure à 10° , puisque la dépense de charge est une hauteur d'eau. Moyennant cela, les équations (65 *bis*) pour le tube A_v , par exemple, s'écrivent

$$(66) \quad \begin{cases} 1105,118x + 1777,677y - 12921,10 = 0, \\ 1777,677x + 3,181003y - 21,14893 = 0; \end{cases}$$

elles donnent

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'} = 0^{\text{m}}, 009869 \quad \text{et} \quad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'} = 1,133.$$

On peut identifier à peu près les premiers membres de (65), où

⁽¹⁾ Le diamètre moyen du tube est la moyenne de toutes les mesures prises aux deux extrémités.

x et y auraient ces valeurs, avec les expressions purement théoriques (64). On aurait

$$\begin{aligned} L + \alpha D &= 0^m, 009869, \\ \alpha D &= 0^m, 00032, \\ \alpha &= 2, 2. \end{aligned}$$

Les expressions $\frac{8\varepsilon Ux}{\rho g R^2} + \frac{U^2}{g} y$, calculées numériquement en y substituant ces nombres à x et à y , pour les première, troisième, cinquième et septième expériences, rendront compte de la précision de la détermination que nous venons de faire. Voici, avec les vitesses d'écoulement, les valeurs des deux termes de ces expressions, puis les dépenses observées :

TUBE A _v .			
	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
1.....	0,15187	0,31916 + 0,00266 =	0,32182
3.....	0,62203	1,30714 + 0,04469 =	1,35183
5.....	1,17822	2,47592 + 0,16035 =	2,63627
7.....	4,08678	8,58796 + 1,92917 =	10,51713

On voit que les expressions 2 ne diffèrent des expressions 3 que de quelques millimètres d'eau en plus ou en moins. Les équations (65), formées numériquement à l'aide des Tableaux du tube A_v donneraient $x = 0^m, 007001$ (α égalerait alors 1,6) et $y = 1,09$, et, en répétant pour les expériences 1, 3, 5, 7 du tube A_v les calculs faits ci-dessus pour A_v, on aurait :

TUBE A _{VI} .			
	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
1.....	0,22095	0,32936 + 0,00542 =	0,33478
3.....	0,85107	1,26865 + 0,08049 =	1,34914
5.....	1,57314	2,34503 + 0,27501 =	2,62004
7.....	5,10383	7,60810 + 2,89468 =	10,50278

Il faut choisir pour le coefficient que nous avons appelé y une valeur intermédiaire entre les deux trouvées, autant que possible. La moyenne serait un peu plus petite que 1,12. D'autre part, notre théorie semble au contraire attribuer à ce coefficient une valeur un peu plus grande

que 1,12. Nous prendrons ce nombre en chiffre rond pour étudier directement toutes les autres expériences de la seconde série et nous appellerons toujours à l'avenir *dépense de charge théorique* l'expression

$$\frac{8\varepsilon U(L + \alpha D)}{\gamma \pi R^5} = 1,12 \frac{U^2}{g}.$$

Déterminons pour les tubes A_v et A_{vi} les nouvelles valeurs les plus convenables à adopter pour α . La première équation du système (66), où l'on remplace γ par 1,12, détermine $\alpha = 0,00989$ (tube A_v) d'où $\alpha = 2,4$. Cette nouvelle longueur, substituée en même temps que 1,12, donne des divergences un peu plus grandes que les précédentes, entre les dépenses de charges théoriques et observées. On peut s'en convaincre par le Tableau

TUBE A_v .

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
1.....	0,15187	0,31984 + 0,00263 = 0,32247	0,32077
3.....	0,62203	1,30992 + 0,04418 = 1,35410	1,34643
5.....	1,17822	2,48119 + 0,15851 = 2,63970	2,62328
7.....	4,08678	8,60627 + 1,90703 = 10,51330	10,51158

Pour le tube A_{vi} le nouvel $\alpha = 0^m,00694$, d'où $\alpha = 1,1$, et une nouvelle détermination de la perte de charge théorique donne lieu au Tableau

TUBE A_{vi} .

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
1.....	0,22095	0,32648 + 0,00557 = 0,33205	0,33590
3.....	0,85107	0,25756 + 0,08270 = 1,34026	1,34808
5.....	1,57314	2,32452 + 0,28258 = 2,60710	2,61914
7.....	5,10383	7,54155 + 2,97435 = 10,51590	10,50032

§ 15. Les expériences sur les autres tubes A s'accordent assez bien avec la théorie et les lois déduites des précédentes. — En adoptant donc 1,12 pour le coefficient de $\frac{U^2}{g}$ dans la dépense de charge, on trouvait que la longueur du tube A_v , qui est $9^m,55$, devait être portée à $9^m,89$, c'est-à-dire augmentée de 2,4 fois son diamètre. Au contraire, le tube A_{vi} ne devait être augmenté que de 1,1 fois son diamètre. Prenons la

- moyenne entre ces deux nombres, et cela nous mènera à essayer l'interprétation des autres expériences en ajoutant aux tubes une longueur fictive égale à 1,7 fois leurs diamètres pour exprimer la dépense de charge théorique.

La partie en U de cette dépense de charge se compose naturellement de deux termes $\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2}$ et $\frac{8\varepsilon U \alpha D}{\rho g R^2}$. L'expression numérique du tout comprendra donc trois termes. Le second sera toujours très petit par rapport au premier; le troisième, $1,12 \frac{U^2}{g}$, variera dans de larges limites. Les trois termes permettront au lecteur de voir mieux combien le régime s'écarte du régime uniforme.

Tube A_{iii}. — Dans la première expérience faite avec le tube A_{iii}, les trois termes sont

$$5,2297 + 0,0491 + 0,1055 = 5,3843,$$

alors que la dépense de charge mesurée est

$$5,2586.$$

Il semble que cette expérience mette notre théorie en défaut: la partie en U est plus grande à elle seule que la dépense de charge observée, le troisième terme serait inutile (¹). Pourtant, si, comme plus haut, nous formions les expressions $\left(\frac{8\varepsilon U}{\rho g R^2}x + \frac{U^2}{g}y\right)$ pour ces expériences, et si nous les égalions aux dépenses observées, nous serions conduit à écrire deux équations du premier degré en x et y qui donneraient

$$x = 0^m,025212,$$

$$y = 1,0414.$$

Ceci indique clairement que la différence entre les deux nombres 5,3843 et 5,2586 cités plus haut provient uniquement de la partie en U de la dépense théorique. La longueur à attribuer au tube serait inférieure à la longueur réelle, mais le terme correctif en U^2 doit rester à très peu près ce qu'il est. Comment expliquer cette anomalie?

(¹) *A priori*, il ne faut pas être trop surpris de ces écarts, ils sont de l'ordre de ceux que peuvent introduire les moindres défauts de calibrage des tubes ou les moindres variations de la température.

Supposons calculées les deux parties de la dépense de charge théorique à l'aide des valeurs x et y que nous venons de trouver. On pourrait, en diminuant ε , sans changer la première partie, augmenter la valeur numérique de la longueur L à donner au tube ⁽¹⁾. D'après la loi générale que nous voulions adopter, L devait être 0^m,025798 au lieu de 0^m,02512; et il faudrait réduire ε de 0,0000001336 à 0,0000001306 pour substituer la première longueur à la seconde.

Peut-être la température, pendant ces expériences, était-elle un peu supérieure aux dix degrés voulus. Poiseuille a toujours opéré avec un très grand soin. La petitesse des écarts trouvés entre les expressions 2 et 3 des pages 61 et 62 en est d'ailleurs une preuve. Il est possible pourtant qu'il y ait eu cette fois un peu de négligence. Le tube a été brisé après la deuxième expérience et c'est la seule fois qu'un tel accident s'est produit.

Si l'erreur est due à la température, un demi-degré suffirait à la rigueur pour expliquer l'écart. De plus, cette cause n'aurait pas modifié le terme en $\frac{U^2}{g}$, en vertu de notre théorie. Donc, celle-ci est loin d'être infirmée par ces expériences.

Tube A_{iv}. — Si nous comparons les dépenses de charge théoriques et observées pour les expériences faites avec le tube A_{iv}, nous aurons :

	1.	2.	3.
	Vitesses de l'écoulement.	Dépenses de charge théoriques.	Observées.
1....	0,0978	0,3281 + 0,0050 + 0,0011 =	0,3342
2....	0,1942	0,6514 + 0,0099 + 0,0043 =	0,6656
3....	0,3856	1,2930 + 0,0197 + 0,0170 =	1,3297
4....	0,5814	1,9497 + 0,0297 + 0,0386 =	2,0180
5....	0,7580	2,5420 + 0,0387 + 0,0656 =	2,6463
6....	1,4815	4,9683 + 0,0757 + 0,2506 =	5,2946
7....	2,8383	9,5199 + 0,1450 + 0,9202 =	10,5851

(1) Le coefficient ε , déterminé d'après des expériences faites sur des tubes de 50^{mm}, 100^{mm} et 200^{mm}, est sans doute un peu trop fort, puisque, nulle part, dans ces expériences, on n'a supposé qu'il y avait de terme correctif dans l'expression de la dépense de charge. Si ce coefficient est un peu trop fort, la valeur de x en diminue d'autant plus d'une manière absolue que x est plus fort lui-même.

D'après les derniers résultats, le troisième terme des expressions 2 serait trop fort, surtout d'après le dernier même. J'ai dit, au commencement du Chapitre, que, de l'avis de M. Couette, la température avait pu s'élever un peu pendant ces expériences (COUETTE, *Thèse de Doctorat*, p. 74). L'accord général est néanmoins assez satisfaisant.

Tube A_{VII}. — Restent, parmi les premières expériences, celles faites avec le tube A_{VII}. Ce tube était si court (1^{mm}), que, d'après la théorie développée à la fin du Chapitre IV, le régime uniforme n'avait pas l'espace nécessaire pour s'y établir, si les écoulements devenaient très rapides.

Nous avons vu que, dans un tube de 1^{mm} de diamètre, quand la vitesse de débit est 1^m par seconde, le régime uniforme est établi à la distance 0^m,05 de l'entrée. Car alors, le rapport maximum de l'écart de vitesse en un point d'une section à la vitesse au même point en régime uniforme est 0,0078. Il suffit d'atteindre 0^m,048 de l'entrée, pour que ce rapport soit 0,01. De plus, j'ai fait remarquer que, en appelant l la distance de l'origine à la section où est établi le régime uniforme, on a, pour tous les tubes possibles et avec toutes les vitesses d'écoulement possibles :

$\frac{l}{R^2 U}$ égale une constante, que le calcul donne égale à 189000.

Or, ici, le rayon est à très peu près

$$0^m,00007, \quad \text{d'où} \quad R^2 = 0,0000000049, \quad l = 0,0009261 U.$$

Les vitesses de débit sont marquées ci-dessous. On peut se convaincre que, dans les cinq dernières expériences, il faudrait, pour que le régime uniforme fût établi, des tubes de 2^{mm},24, 2^{mm},89, 3^{mm},18, 5^{mm},43 et 8^{mm},24. On verra que, sauf pour les deux dernières expériences, les valeurs des dépenses de charge théoriques et observées sont pourtant à peu près égales. D'ailleurs, l'hypothèse que nous avons faite pour caractériser l'établissement du régime uniforme est peut-être un peu trop restrictive, un écart relatif de 0,01 sur les vitesses individuelles étant bien peu de chose. Voici le Tableau qui

donne les dépenses de charge théoriques et observées en employant le tube A_{VII} :

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
1....	0,2154	0,0459 + 0,0110 + 0,0053 =	0,0622
2....	0,2754	0,0587 + 0,0140 + 0,0087 =	0,0814
3....	0,5019	0,1069 + 0,0256 + 0,0288 =	0,1613
4....	0,8683	0,1850 + 0,0443 + 0,0861 =	0,3154
5....	1,4796	0,3152 + 0,0757 + 0,2500 =	0,6409
6....	2,4257	0,5169 + 0,1239 + 0,6718 =	1,3126
7....	3,1684	0,6751 + 0,1620 + 0,1462 =	1,9833
8....	3,7760	0,8047 + 0,1930 + 1,6286 =	2,6263
9....	5,8747	1,2518 + 0,3002 + 3,9407 =	5,4927
10....	8,9049	1,8975 + 0,4552 + 9,0542 =	11,4069
			10,4993

Remarquons que les dernières dépenses de charge théoriques sont plus grandes que celles observées. Donc, la vitesse moyenne réelle d'écoulement est plus grande que ne le voudrait la théorie. Cela n'est pas étonnant, le régime uniforme n'a pas eu le temps de s'établir; donc, la charge, qui serait absorbée pour cet établissement complet, ne l'est pas et contribue à augmenter la vitesse. Pour calculer alors la perte de charge théorique, il faut diminuer le coefficient de $\frac{U^2}{g}$ (').

§ 16. Étude des tubes F. — Poiseuille a fait aussi, avec des tubes de longueurs et de sections différentes, d'autres expériences.

Certains de ces tubes sont assez courts et l'écoulement y est, d'ailleurs assez rapide pour que le terme corrélatif à l'établissement du régime uniforme prenne une valeur importante. Les tubes F qui sont dans ce cas obéissent régulièrement aux mêmes lois, exposées plus haut, que les tubes A. F', successivement raccourci, a fourni F', F'', F''', F^{iv} et F^v à ranger dans la seconde série.

(¹) Au contraire, les dépenses de charge observées sont un peu plus fortes que les dépenses de charges théoriques, dans les sept premières expériences. Le lecteur pourra se rendre compte en lisant la discussion faite ci-dessus des résultats du tube A_{VII} que, si j'avais bien pesé cette remarque dès la première rédaction de ma Thèse, je n'aurais peut-être pas hésité à adopter 1, 13, au lieu de 1, 12, pour le coefficient $\frac{U^2}{g}$ dans le dernier terme de dépense de charge. La théorie eût été ainsi encore mieux confirmée.

Remarquons ces tubes particulièrement, car leurs diamètres sont beaucoup plus grands que ceux de tous les autres tubes; en sorte que les défauts de calibrage qui y auraient été plus visibles n'ont pas dû s'y présenter puisqu'ils n'ont pas été observés. Voici la copie des résultats des expériences faites avec ces tubes :

TUBE F'.

Longueur du tube	$l = 200^{\text{mm}}$
Diamètres du tube à ses deux extrémités. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Extrémité libre...} \\ \text{Extrémité opposée.} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} d = 0,614 \\ d' = 0,690 \\ d = 0,616 \\ d' = 0,6932 \end{array} \right.$
Température	10°

Nos.	Pressions exprimées en hauteurs d'eau	Temps de l'écoulement de $17^{\text{se}}, 566.$
	à $10^{\circ}.$ mm	
1	83,36	1295 "
2	127,60	838
3	163,71	657
4	328,82	326
5	661,29	162
6	1321,87	81,5
7	1981,76	56
8	2626,58	42
9	5210,27	22,5
10	10459,10	12

TUBE F''.

Longueur du tube	$l = 99^{\text{mm}}, 755$
Diamètres du tube à ses deux extrémités	$d = \left\{ \begin{array}{l} 0,6520 \\ 0,6546 \end{array} \right.$
Température	10°

Nos.	Pressions exprimées en hauteurs d'eau	Temps de l'écoulement de $17^{\text{se}}, 566.$
	à $10^{\circ}.$ mm	
1	81,83	666 "
2	163,97	328
3	331,51	165
4	664,36	84,5
5	1323,58	45
6	1984,95	31
7	2585,33	25
8	5207,73	15
9	10454,54	9

TUBE F^{III}.

Longueur du tube.....	$l = 50^{\text{mm}}, 45$
Diamètres du tube à ses extrémités.....	$\left\{ \begin{array}{l} \text{Extrémité libre...} \left\{ \begin{array}{l} d = 0,615 \\ d' = 0,690 \end{array} \right. \\ \text{Extrémité opposée.} \left\{ \begin{array}{l} d = 0,616 \\ d' = 0,6932 \end{array} \right. \end{array} \right.$
Température.....	10°

Pressions exprimées en hauteurs d'eau		Temps de l'écoulement
Nos.	à 10°.	de 17 ^{cc} , 566.
	^{mm}	
1.....	82,08	345"
2.....	163,78	175
3.....	329,77	91
4.....	660,97	50
5.....	1323,56	28
6.....	1983,20	21,75
7.....	2590,76	17,50
8.....	5160,07	11
9.....	10456,45	7

TUBE F^{IV}.

Longueur du tube.....	$l = 26^{\text{mm}}, 00$
Diamètres du tube à ses extrémités.....	$d = \left\{ \begin{array}{l} 0,6160 \\ 0,6932 \end{array} \right.$
Température.....	10°

Pressions exprimées en hauteurs d'eau		Temps de l'écoulement de 17 ^{cc} , 566.
N ^{os} .	à 10°. mm	
1.....	82,36	191 ^{''}
2.....	163,39	104
3.....	328,59	59,75
4.....	661,59	35
5.....	1321,19	21,75
6.....	1985,00	16,75
7.....	2614,60	13,50
8.....	5205,08	9
9.....	10458,02	6

TUBE F^V.

Longueur du tube.....	$l = 10^{\text{mm}}, 75$
Diamètres du tube à ses extrémités.....	$d = \left\{ \begin{array}{l} 0,6160 \\ 0,6932 \end{array} \right.$
Température.....	10°

Nos.	Pressions exprimées en hauteurs d'eau	Temps de l'écoulement
	à 10°.	de 17° ^{cc} ,566.
1.....	^{mm} 74,29	114"
2.....	83,89	103
3.....	162,89	63
4.....	329,39	39
5.....	653,49	25
6.....	1306,69	16
7.....	1985,29	13
8.....	2606,37	10,75
9.....	5146,62	7,50
10.....	10456,65	5

Dans ces tubes, Poiseuille mesurait les pressions en hauteur d'eau à 10°. Nous supposons à l'eau la densité 1 et les dépenses de charge observées seront les pressions obtenues directement. Donnons les résultats des calculs des expressions 1, 2 et 3 relatifs aux expériences sur les tubes F.

TUBE F'.

1.	2.	3.
Vitesses de l'écoulement.	Dépenses totales de charge théoriques.	Observées.
^m 1..... 0,0405	^m ^m ^m ^m 0,0811 + 0,0004 + 0,0002 = 0,0817	^m 0,0834
2..... 0,0625	0,1253 + 0,0007 + 0,0004 = 0,1264	0,1276
3..... 0,0798	0,1598 + 0,0009 + 0,0007 = 0,1614	0,1637
4..... 0,1607	0,3220 + 0,0018 + 0,0029 = 0,3267	0,3288
5..... 0,3235	0,6480 + 0,0036 + 0,0119 = 0,6635	0,6613
6..... 0,6429	1,2881 + 0,0071 + 0,0472 = 1,3424	1,3219
7..... 0,9358	1,8747 + 0,0103 + 0,1000 = 1,9850	1,9818
8..... 1,2477	2,4996 + 0,0137 + 0,1780 = 2,6913	2,6266
9..... 2,3290	4,6659 + 0,0256 + 0,6193 = 5,3108	5,2103
10..... 4,1923	8,3987 + 0,0462 + 2,0067 = 10,4516	10,4591

On voit que, dans ce Tableau, les dépenses de charge théoriques sont tantôt au-dessus, tantôt au-dessous de celles observées. De plus, les erreurs absolues ne sont pas très grandes.

Je n'ai fait, pour ne pas trop allonger, les calculs de la dépense totale de charge théorique, que pour les première, troisième, sixième et huitième expériences du tube F', pour les première, troisième, cinquième, septième et neuvième de F''. Les résultats de ces calculs, on

peut le voir ci-après, sont très réguliers et sont assez conformes à la loi générale.

TUBE F^{II}.

1.	2.	3.
Vitesses de l'écoulement.	Dépenses de charge théoriques.	Observées.
^m	^m ^m ^m ^m	^m
1..... 0,0787	0,0786 + 0,0009 + 0,0007 = 0,0802	0,0818
3..... 0,3176	0,3173 + 0,0035 + 0,0115 = 0,3323	0,3315
6..... 1,6894	1,6886 + 0,0188 + 0,3263 = 2,0337	1,9849
8..... 3,4935	3,4898 + 0,0389 + 1,3935 = 4,9223	5,2077

TUBE F^{III}.

1.	2.	3.
Vitesses de l'écoulement.	Dépenses de charge théoriques.	Observées.
^m	^m ^m ^m ^m	^m
1..... 0,1517	0,0766 + 0,0017 + 0,0026 = 0,0809	0,0821
3..... 0,5753	0,2905 + 0,0064 + 0,0378 = 0,3347	0,3298
5..... 1,8698	0,9440 + 0,0208 + 0,3992 = 1,3640	1,3236
7..... 2,9917	1,5105 + 0,0333 + 1,0219 = 2,5657	2,5908
9..... 7,4793	3,7763 + 0,0861 + 6,3872 = 10,2496	10,4564

D'après notre théorie, le régime uniforme ne devait plus être tout à fait établi dans la dernière de ces expériences; néanmoins, les expressions numériques 2 et 3 correspondantes restent à peu près égales.

Restent F^{IV} et F^V parmi les tubes F. Voici, pour ces deux tubes, des Tableaux analogues à ceux donnés pour les autres :

TUBE F^{IV}.

1.	2.	3.
Vitesses de l'écoulement.	Dépenses de charge théoriques.	Observées.
^m	^m ^m ^m ^m	^m
1..... 0,2733	0,0709 + 0,0030 + 0,0085 = 0,0824	0,0824
2..... 0,5019	0,1301 + 0,0056 + 0,0288 = 0,1645	0,1634
3..... 0,8736	0,2266 + 0,0097 + 0,0871 = 0,3234	0,3289
4..... 1,4913	0,3870 + 0,0165 + 0,2539 = 0,6574	0,6616
5..... 2,3998	0,6226 + 0,0265 + 0,6575 = 1,3066	1,3212
6..... 3,1161	0,8083 + 0,0345 + 1,1087 = 1,9515	1,9850
7..... 3,8663	1,0030 + 0,0428 + 1,7068 = 2,7526	2,6146
8..... 5,7994	1,5044 + 0,0642 + 3,8404 = 5,4090	5,2051
9..... 8,6992	2,2568 + 0,0962 + 8,6407 = 10,9937	10,4580

TUBE F^v.

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
	^m	^m ^m ^m ^m ^m	^m
1	0,4578	0,0486 + 0,0056 + 0,0239 =	0,0781
2	0,5067	0,0538 + 0,0062 + 0,0293 =	0,0893
3	0,8285	0,0879 + 0,0101 + 0,0784 =	0,1764
4	1,3383	0,1421 + 0,0163 + 0,2045 =	0,3629
5	2,0888	0,2215 + 0,0255 + 0,4977 =	0,7447
6	3,2622	0,3462 + 0,0398 + 1,2151 =	1,6011
7	4,0150	0,4261 + 0,0490 + 1,8406 =	2,3157
8	4,8554	0,5152 + 0,0593 + 2,6918 =	3,2663
9	6,9593	0,7385 + 0,0850 + 5,5301 =	6,3536
10	10,4390	1,1077 + 0,1275 + 12,4426 =	13,6778
			10,4566

Les tubes F^{iv} et F^v ne sont pas assez longs pour qu'on puisse y considérer le régime uniforme comme établi pour toutes les expériences. D'après la théorie, cette condition est remplie à une distance de l'entrée égale à $189000R^2U$. Or, ici, $R = 0,0003273$: donc la distance cherchée sera $0,02025 \times U$.

Cette expression ne commence à dépasser la longueur du tube que pour la quatrième expérience dans le premier Tableau. L'accord entre la dépense théorique et celle observée subsiste jusqu'à la sixième. A partir de là, l'expression 2 devient plus grande que 3, ce qui confirme la conclusion déjà tirée relativement à l'absorption de la charge pour l'établissement du régime uniforme. Pour F^v, d'après la théorie, le régime uniforme n'est guère établi que pour les deux premières expériences. On voit que, sauf pour celles-là, il n'y a pas accord, dans le dernier Tableau, entre les expressions 2 et 3. La différence des deux prend à la fin une valeur très grande.

§ 17. Tubes B, C et D. — Dans ceux des tubes B, C et D qui appartiennent à la seconde série, c'est-à-dire qui sont assez courts, pour que le terme en $\frac{U^2}{g}$ de la charge totale dépensée y ait une importance notable, l'écoulement ne paraît pas suivre tout à fait les lois générales. La cause de la divergence entre l'expression de la charge totale dépensée obtenue par le calcul et celle observée directement est vrai-

semblablement de même nature pour toutes les expériences relatives à ces tubes. Cette raison m'a déterminé à donner successivement, d'abord les Tableaux contenant les résultats des expériences faites par Poiseuille avec tous ces tubes; ensuite, ceux des dépenses de charge théoriques et observées correspondantes.

TUBE B^v.

Longueur du tube.....	$l = 9^{\text{mm}}, 00$
Diamètres du tube à ses deux extrémités. $\left\{ \begin{array}{l} \text{Extrémité libre...} \\ \text{Extrémité opposée.} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} d = 0,1121 \\ d' = 0,1144 \\ d = 0,1125 \\ d' = 0,1148 \end{array} \right.$
Température.....	10°

N ^{os} .	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $6^{\text{se}}, 4482$.
	^{mm}	
1.....	24,756	5543"
2.....	49,857	2762
3.....	99,214	1400
4.....	149,082	935
5.....	193,194	728
6.....	387,024	375
7.....	774,540	199

TUBE B^v.

Longueur du tube.....	$l = 3^{\text{mm}}, 9$
Diamètres du tube.....	$d = \left\{ \begin{array}{l} 0,1125 \\ 0,1155 \end{array} \right.$
Température.....	10°

N ^{os} .	Pressions exprimées en mercure à 10° .	Temps de l'écoulement de $6^{\text{se}}, 4482$.
	^{mm}	
1.....	24,29	2386"
2.....	49,578	1193
3.....	99,139	621
4.....	149,098	428
5.....	193,130	340
6.....	387,024	189
7.....	773,282	110

TUBE C^v.

Longueur du tube.....	$l = 6^{\text{mm}}, 025$
Diamètres du tube à ses deux extrémités.....	$d = \left\{ \begin{array}{l} 0,085 \\ 0,086 \end{array} \right.$
Température.....	10°

N ^{os} .	Pressions exprimées en mercure à 10°.	Temps de l'écoulement de 2 ^{es} , 10 ^{es} 7.
1.....	^{mm} 24,132	5587
2.....	50,506	1768
3.....	99,102	904
4.....	149,119	606,5
5.....	194,217	470
6.....	387,237	245
7.....	773,327	131,5

TUBE D^{iv}.

Longueur du tube.....	$l = 3^{\text{mm}}, 35$
Diamètres du tube.....	$d = \begin{cases} 0,0425 \\ 0,0445 \end{cases}$
Température.....	10°

N ^{os} .	Pressions exprimées en mercure à 10°.	Temps de l'écoulement de 0 ^{es} , 3629.
1.....	^{mm} 23,884	5479
2.....	50,276	2611,75
3.....	97,440	1373
4.....	147,889	897
5.....	193,459	697
6.....	387,062	349
7.....	772,117	176

Voici les Tableaux, que l'on peut désigner par les chiffres I, II, III, IV, des dépenses de charges théoriques et observées correspondant à ces expériences :

TUBE B^{iv}.

N ^{os} .	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
	^m	^m	^m
1.....	0,1152	$0,3447 + 0,0072 + 0,0015 =$	0,3534
2.....	0,2311	$0,6917 + 0,0145 + 0,0061 =$	0,7123
3.....	0,4560	$1,3645 + 0,0288 + 0,0237 =$	1,4170
4.....	0,6828	$2,0431 + 0,0431 + 0,0532 =$	2,1394
5.....	0,8770	$2,6241 + 0,0553 + 0,0878 =$	2,7672
6.....	1,7025	$5,0942 + 0,1073 + 0,3309 =$	5,5324
7.....	3,2082	$9,6135 + 0,2032 + 1,1832 =$	10,9999
D.			10

(I)

TUBE B^r.

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
N ^o .			
	^m	^m	^m
(II) { 1.....	0,2676	0,3469 + 0,0169 + 0,0082 =	0,3720
2.....	0,5351	0,6938 + 0,0338 + 0,0327 =	0,7603
3.....	1,0280	1,3330 + 0,0649 + 0,1206 =	1,5185
4.....	1,4916	1,9340 + 0,0942 + 0,2540 =	2,2822
5.....	1,8778	2,4346 + 0,1186 + 0,4026 =	2,9558
6.....	3,3780	4,3798 + 0,2133 + 1,3029 =	5,8960
7.....	5,8040	7,5254 + 0,3665 + 3,8463 =	11,7382
			10,4934

TUBE C^r.

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
N ^o .			
	^m	^m	^m
(III) { 1.....	0,1025	0,3619 + 0,0087 + 0,0012 =	0,3718
2.....	0,2079	0,7343 + 0,0177 + 0,0049 =	0,7569
3.....	0,4066	1,4362 + 0,0346 + 0,0189 =	1,4897
4.....	0,6061	2,1407 + 0,0515 + 0,0419 =	2,2341
5.....	0,7821	2,7624 + 0,0665 + 0,0698 =	2,8987
6.....	1,5004	5,2993 + 0,1275 + 0,2571 =	5,6839
7.....	2,7955	9,8732 + 0,2376 + 0,8923 =	11,0031
			10,4931

TUBE D^{iv}.

	1. Vitesses de l'écoulement.	2. Dépenses de charge théoriques.	3. Observées.
N ^o .			
	^m	^m	^m
(IV) { 1.....	0,0446	0,3373 + 0,0075 + 0,0002 =	0,3450
3.....	0,1778	1,3461 + 0,0297 + 0,0036 =	1,3794
5.....	0,3503	2,6516 + 0,0586 + 0,0140 =	2,7242
7.....	1,3874	10,5009 + 0,2320 + 0,2198 =	10,9527
			10,4777

Les valeurs des dépenses de charge théoriques, dans les Tableaux ci-dessus, sont notablement plus fortes que les expressions 3, bien que l'on puisse certainement considérer le régime uniforme comme établi avant la sortie du tube.

Essai d'explication des écarts fournis par les quatre derniers Tableaux entre la théorie et l'expérience. — Toutes les expressions 2, réduites d'un vingtième dans le Tableau (I), deviendront aussi voisines des expressions 3 que nous pouvons le désirer pour confirmer la théorie

générale. La réduction d'un neuvième environ permet d'obtenir le même résultat pour le Tableau (II). Or, l'obligation de diminuer dans un certain rapport les totaux 2, dans chaque Tableau, rend évidemment nécessaire de diminuer, dans le même rapport, chacun de leurs termes. Nous en concluons que, en calculant ces termes, nous avons employé partout un facteur commun trop grand. D'ailleurs, le seul facteur numérique, qui paraît à la même puissance dans l'expression de la partie en U et dans celle de la partie en U^2 de la dépense de charge théorique, est le rayon du tube. Il s'y trouve en dénominateur à la puissance quatre. Nous serions donc naturellement conduit ici, pour accorder la théorie et l'expérience, à augmenter de $\frac{1}{76}$ le rayon du tube B^{iv} et de $\frac{1}{31}$ celui du tube B^v (').

Selon toute probabilité, les diamètres extrêmes des tubes ont été bien mesurés; mais peut-être se serait-il formé un renflement intérieur dans le tube B, renflement qui serait voisin de l'entrée puisqu'il influerait plus sur l'écoulement quand B est assez raccourci pour constituer B^v que quand il n'est encore que B^{iv} .

Cette hypothèse est assez naturelle au point de vue physique. Quand Poiseuille fixait en A (*fig.* 3) ses tubes capillaires, il chauffait leur extrémité pour la ramollir, plaçait cette extrémité dans son logement et appuyait fortement de manière que le tube pût faire corps avec l'ampoule. Cette dernière opération pouvait causer le renflement dont j'ai parlé, dû aussi peut-être à un retrait amené par la fusion et plus en rapport avec la masse de verre fondue, c'est à-dire avec l'épaisseur de la paroi, qu'avec la capacité de la cavité existant suivant l'axe. Observons de plus qu'avec des tubes d'une aussi grande finesse, des défauts relativement assez grands de calibrage devaient passer inaperçus.

Ce qui achève de justifier l'hypothèse précédente, c'est que dans le tube B''' de la première série, près de trois fois plus long que B^{iv} , l'expression théorique de la charge dépensée, alors réduite à $\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2}$, est

(1) Il est évident, même *a priori*, qu'une telle augmentation du rayon rend la vitesse de débit moins grande et, par ce fait, diminue la valeur numérique de la dépense de charge théorique.

plus grande que la dépense observée. Toutefois, la différence entre ces deux dépenses est bien petite; c'était à prévoir, car elle était déjà plus petite pour B^{iv} que pour B^v.

Le tube C, encore plus fin (0^{mm},08), devait avoir aussi un renflement. Dans le tube C^{iv}, appartenant comme Bⁱⁱⁱ à la première série, la différence entre $\frac{8\varepsilon UL}{\rho g R^2}$ et la dépense observée a tout à fait la même importance que dans le Tableau (I) du tube B^v. Pour les deux expériences extrêmes, faites avec ce tube, on a notamment :

Dépenses théoriques.	Observées.
^m 0,3535	^m 0,3364
2,1245	2,0191

Dans le Tableau du tube C^v, les expressions 2 dépassent les expressions 3 de quantités à peu près les mêmes que dans celui de B^v, pour les premiers résultats. La différence relative s'atténue ensuite en grande partie. D^{iv} suit la même loi et même l'atténuation de la différence entre les dépenses de charge théoriques et observées est encore plus rapide. Mais ces anomalies chez des tubes aussi fins peuvent tenir à des causes très diverses.

Vu et approuvé :

Paris, le 16 avril 1895,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,
G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 16 avril 1895.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,
GRÉARD.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS D'ANALYSE DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \pm 4k^2 u \quad (\text{où } k \text{ est une constante positive}),$$

sous la condition que, pour une valeur particulière donnée du temps t , pour $t = 0$ par exemple, la fonction u et sa dérivée première par rapport à t se réduisent à deux fonctions continues, mais d'ailleurs arbitraires, des coordonnées x, y, z , en tous les points (x, y, z) de l'espace.

Vu et approuvé :

Paris, le 16 avril 1895,

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

G. DARBOUX.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 16 avril 1895,

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

GRÉARD.

ERRATA.

Page 2, en note, *lire* LIOUVILLE, 1878, p. 335.

Page 10, dans l'expression de ϖ , au milieu de la page, *au lieu de* $A_2)y^2 - z^2$,
lire $A_2(y^2 - z^2)$.

Page 23, deuxième ligne, *lire* $\Psi(0)$ *et non* $\psi(0)$.

Page 39, deuxième ligne de l'alinéa précédant le Tableau, *lire* z égal à 0, 0, 1.

Page 40, avant-dernier alinéa, deuxième ligne, *lire* fonction approximative
de ψ_2^2 .

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

22116

Quai des Grands-Augustins, 55.
